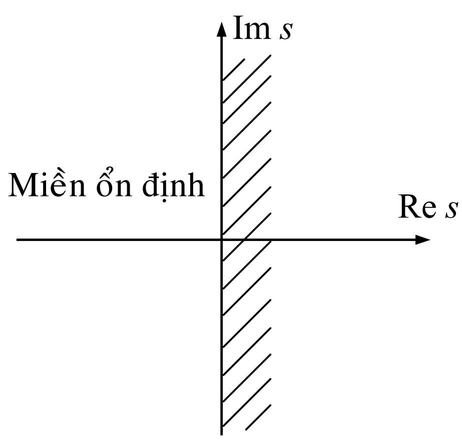
Chương 8

PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ HỆ RỜI RẠC

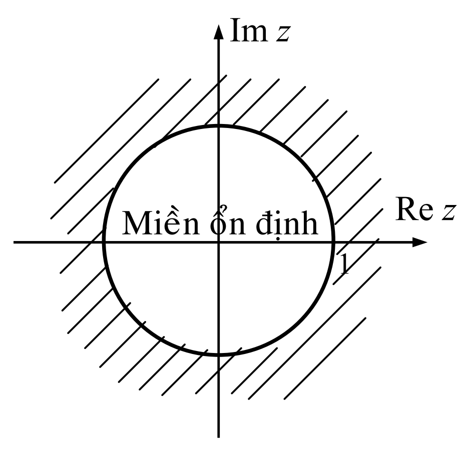
8.1. KHẢO SÁT TÍNH ỔN ĐỊNH

8.1.1. Khái niệm về tính ổn định của hệ rời rạc

Ở chương 4 chúng ta đã xét khái niệm ổn định của hệ liên tục, hệ thống được gọi là ổn định nếu tín hiệu vào bị chặn thì tín hiệu ra bị chặn. Chúng ta cũng đã dẫn ra được điều kiện để hệ liên tục ổn định là tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng đều nằm bên trái mặt phẳng phức theo biến s, nói cách khác tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ liên tục phải có phần thực âm. Do phép biển đổi Z và phép biến đổi Laplace có mối liên hệ $z = e^{Ts}$ (với T là chu kỳ lấy mẫu) nên s có phần thực âm tương đương với $|z|<1$, hay z nằm trong vòng tròn đơn vị. Vì vậy điều kiện để hệ rời rạc ổn định là tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng đều phải nằm bên trong vòng tròn đơn vị của mặt phẳng phức theo biến z. Hình 8.1 minh họa miền ổn định của hệ liên tục và hệ rời rạc.



(a) *Hệ liên tục*

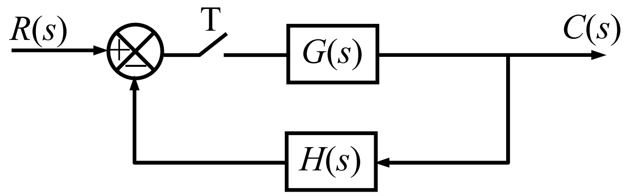


(b) *Hệ rời rạc*

Hình 8.1: *Miền ổn định của hệ thống điều khiển*

Như vậy tương tự như đã làm đối với hệ liên tục, để đánh giá tính ổn định của hệ rời rạc ta chỉ cần khảo sát phương trình đặc trưng. Sau đây là phương trình đặc trưng của hai dạng mô tả hệ rời rạc thường gặp:

– Hệ thống rời rạc cho bởi sơ đồ khối:



Phương trình đặc trưng là:

$$1 + GH(z) = 0 \tag{8.1}$$

– Hệ thống rời rạc cho hệ phương trình biến trạng thái:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k) = \boldsymbol{D}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng là:

$$\det(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d) = 0 \tag{8.2}$$

Đối với các hệ rời rạc có mô tả toán học khác hai dạng trên, tham khảo chương 7 để rút ra phương trình đặc trưng.

Để thiết kế hệ điều khiển rời rạc, yêu cầu tối thiểu trước tiên là hệ phải ổn định. Về cơ bản, kỹ thuật phân tích và đánh giá độ ổn định của hệ tuyến tính liên tục cũng có thể áp dụng cho hệ rời rạc với một số sửa đổi cần thiết. Đó là những tiêu chuẩn ổn định đại số Routh–Hurwitz, tiêu chuẩn ổn định tần số Nyquist–Bode, phương pháp quỹ đạo nghiệm số,... Đối với hệ điều khiển rời rạc còn có thêm tiêu chuẩn đại số Jury được sử dụng để kiểm tra tính ổn định của hệ. Song cũng như các tiêu chuẩn ổn định đại số khác như Routh – Hurwitz, kết luận của tiêu chuẩn Jury cũng chỉ cho biết hệ có ổn định hay không, nhưng không cho biết vị trí các nghiệm trong mặt phẳng Z. Nếu kết quả cho thấy hệ ổn định thì có thể khẳng định được tất cả các nghiệm đều nằm trong vòng tròn đơn vị trên mặt phẳng Z, song chúng ta không thể biết các nghiệm nằm gần với đường tròn đơn vị như thế nào. Trái với tiêu chuẩn ổn định đại số, phương pháp phân tích đáp ứng tần số không chỉ xác định tính ổn định mà còn chỉ ra cần thiết kế như thế nào để hệ từ không ổn định trở nên đạt chỉ tiêu chất lượng mong muốn. Sau đây chúng ta sẽ lần lượt trình bày các kỹ thuật đánh giá tính ổn định đã kể trên.

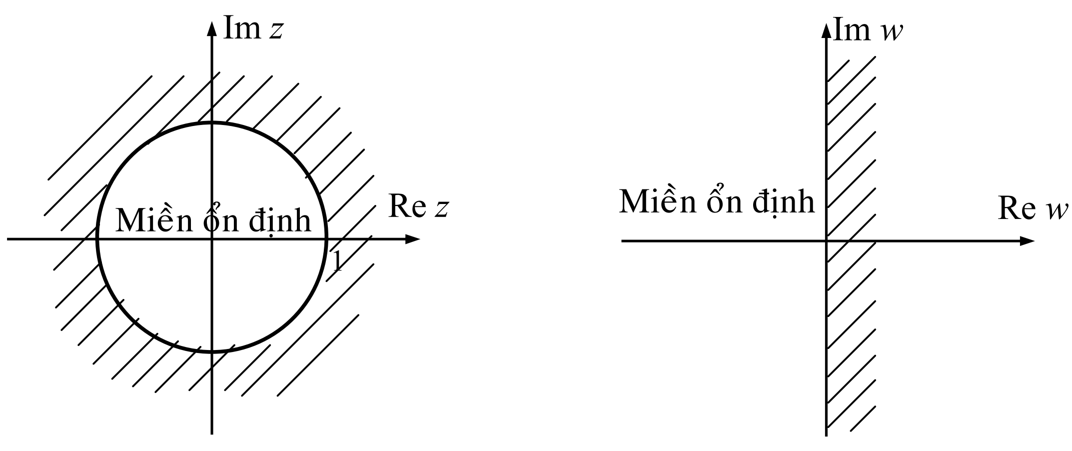
8.1.2. Tiêu chuẩn Routh–Hurwitz mở rộng

Tiêu chuẩn Routh–Hurwitz cho phép đánh giá phương trình đại số $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ có nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức hay không. Ở chương 4 ta đã sử dụng kết quả này để đánh giá số nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức của phương trình đặc trưng của hệ liên tục $a_0s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0$. Nếu phương trình nói trên có nghiệm nằm bên phải mặt phẳng phức thì hệ liên tục không ổn định. Tuy nhiên, ta không thể sử dụng trực tiếp tiêu chuẩn Routh–Hurwitz để đánh giá tính ổn định của hệ rời rạc vì miền ổn định của hệ rời rạc nằm bên trong đường tròn đơn vị. Muốn dùng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz để đánh giá tính ổn định của hệ rời rạc ta phải thực hiện phép đổi biến:

$$z = \frac{w+1}{w-1} \tag{8.3}$$

$$\Leftrightarrow \qquad w = \frac{z+1}{z-1} \tag{8.4}$$

Với cách đổi biến như trên, miền nằm trong vòng trong đơn vị của mặt phẳng *z* biến nửa trái của mặt phẳng *w* (xem hình 8.2). Sau đó ta áp dụng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz đối với phương trình đặc trưng theo biến *w*, nếu không tồn tại nghiệm *w* nằm bên phải mặt phẳng phức thì không tồn tại nghiệm *z* nằm ngoài vòng tròn đơn vị, khi đó ta kết luận hệ rời rạc ổn định. Tiêu chuẩn xét ổn định như trên gọi là tiêu chuẩn Routh–Hurwitz mở rộng.



(a) *Miền ổn định theo biến z* (b) *Miền ổn định theo biến w*

Hình 8.2: *Sự biến đổi miền ổn định của hệ rời rạc*

Thí dụ 8.1: Cho hệ thống rời rạc có phương trình đặc trưng:

$$5z^3 + 2z^2 + 3z + 1 = 0$$

Xét tính ổn định của hệ thống trên.

Lời giải: Đổi biến $z = \dfrac{w+1}{w-1}$, phương trình đặc trưng trở thành:

$$5\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^3 + 2\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + 3\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5(w+1)^3 + 2(w+1)^2(w-1) + 3(w+1)(w-1)^2 + (w-1)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 5(w^3 + 3w^2 + 3w + 1) + 2(w^3 + w^2 - w - 1) + 3(w^3 - w^2 - w + 1) + (w^3 - 3w^2 + 3w - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 11w^3 + 11w^2 + 13w + 5 = 0$$

Đến đây ta có thể dùng tiêu chuẩn Routh hoặc tiêu chuẩn Hurwitz.

Cách 1: ***Bảng Routh***

w^3	11	13
w^2	11	5
w^1	8	0
w^0	5	

Do tất các hệ số ở cột 1 bảng Routh đều dương nên hệ ổn định.

Cách 2: ***Ma trận Hurwitz***

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5 & 0 \\ 11 & 13 & 0 \\ 0 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

- $\Delta_1 = 11 > 0$
- $\Delta_2 = 11 \times 13 - 5 \times 11 > 0$
- $\Delta_3 = 5\Delta_2 > 0$

Do các định thức con của ma trận Hurwitz đều dương nên hệ ổn định. ■

8.1.3. Tiêu chuẩn Jury

Xét hệ rời rạc có phương trình đặc trưng:

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{8.5}$$

Để đánh giá tính ổn định của hệ rời rạc có phương trình đặc trưng (8.5) bằng tiêu chuẩn Jury, trước tiên ta phải lập bảng Jury theo qui tắc sau:

1. Bảng Jury gồm có $(2n+1)$ hàng. Hàng 1 là các hệ số của phương trình đặc trưng (8.5) theo thứ tự chỉ số tăng dần.

2. Hàng chẵn (bất kỳ) gồm các hệ số của hàng lẻ trước đó viết theo thứ tự ngược lại.

3. Hàng lẽ thứ $i = 2k+1$ ($k \geq 1$) gồm có ($n-k+1$) phần tử, phần tử c_{ij} ở hàng i cột j xác định bởi công thức:

$$c_{ij} = \frac{1}{c_{i-2,1}} \begin{vmatrix} c_{i-2,1} & c_{i-2,n-j-k+2} \\ c_{i-1,1} & c_{i-1,n-j-k+2} \end{vmatrix} \tag{8.6}$$

Phát biểu tiêu chuẩn Jury   Điều kiện cần và đủ để hệ thống rời rạc có phương trình đặc trưng (8.5) ổn định là tất cả các hệ số ở hàng lẻ, cột 1 của bảng Jury đều dương.

Thí dụ 8.2: Cho hệ thống rời rạc có phương trình đặc trưng như ở thí dụ 8.1:

$$5z^3 + 2z^2 + 3z + 1 = 0$$

Xét tính ổn định của hệ thống trên dùng tiêu chuẩn Jury.

Lời giải:

Bảng Jury:

Hàng 1	5	2	3	1
Hàng 2	1	3	2	5
Hàng 3	$\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4.8$	$\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.4$	$\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.6$	
Hàng 4	2.6	1.4	4.8	
Hàng 5	$\frac{1}{4.8}\begin{vmatrix} 4.8 & 2.6 \\ 2.6 & 4.8 \end{vmatrix} = 3.39$	$\frac{1}{4.8}\begin{vmatrix} 4.8 & 1.4 \\ 2.6 & 1.4 \end{vmatrix} = 0.61$		
Hàng 6	0.61	3.39		
Hàng 7	$\frac{1}{3.39}\begin{vmatrix} 3.39 & 0.61 \\ 0.61 & 3.39 \end{vmatrix} = 3.28$			

Do các hệ số ở hàng lẻ cột 1 bảng Jury đều dương nên hệ thống ổn định. Kết luận này hoàn toàn phù hợp với kết luận ở thí dụ 8.1 ■

8.1.4. Quỹ đạo nghiệm số

Tương tự như hệ liên tục, đối với hệ rời rạc chúng ta cũng có khái niệm quỹ đạo nghiệm số (QĐNS). QĐNS là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ thống khi có một thông số nào đó trong hệ thay đổi từ $0 \to \infty$.

Xét hệ thống rời rạc có phương trình đặc trưng là:

$$1 + K\frac{N(z)}{D(z)} = 0 \tag{8.7}$$

Đặt:

$$G_0(z) = K\frac{N(z)}{D(z)} \tag{8.8}$$

Gọi n là số cực của $G_0(z)$, m là số zero của $G_0(z)$

(8.7) $\Leftrightarrow$

$$1 + G_0(z) = 0 \tag{8.9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |G_0(z)| = 1 & \text{Điều kiện biên độ} \\ \angle G_0(z) = (2l+1)\pi & \text{Điều kiện pha} \end{cases} \tag{8.10}$$

Vì dạng phương trình đặc trưng của hệ liên tục đã khảo sát ở chương 4 và phương trình đặc trưng (8.7) là như nhau (chỉ thay biến s bằng biến z) nên qui tắc vẽ QĐNS là như nhau, chỉ khác ở qui tắc 8, thay vì đối với hệ liên tục ta tìm giao điểm của QĐNS với trục ảo thì đối với hệ rời rạc ta tìm giao điểm của QĐNS với đường tròn đơn vị. Sau đây là 11 qui tắc vẽ quỹ đạo nghiệm số của hệ thống rời rạc có phương trình đặc trưng có dạng (8.7).

Chú ý: Nếu phương trình đặc trưng của hệ không có dạng (8.7) thì ta phải biến đổi tương đương về dạng (8.7) trước khi áp dụng các qui tắc vẽ QĐNS.

Qui tắc 1: Số nhánh của quỹ đạo nghiệm số = bậc của phương trình đặc trưng = số cực của $G_0(z) = n$.

Qui tắc 2: Khi $K = 0$: các nhánh của quỹ đạo nghiệm số xuất phát từ các cực của $G_0(z)$.

Khi K tiến đến $+\infty$: m nhánh của quỹ đạo nghiệm số tiến đến m zero của $G_0(z)$, $n-m$ nhánh còn lại tiến đến ∞ theo các tiệm cận xác định bởi qui tắc 5 và 6.

Qui tắc 3: Quỹ đạo nghiệm số đối xứng qua trục thực.

Qui tắc 4: Một điểm trên trục thực thuộc về quỹ đạo nghiệm số nếu tổng số cực và zero của $G_0(z)$ bên phải nó là một số lẻ.

Qui tắc 5: Góc tạo bởi các đường tiệm cận của quỹ đạo nghiệm số với trục thực xác định bởi:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{8.11}$$

Qui tắc 6: Giao điểm giữa các tiệm cận với trục thực là điểm A có tọa độ xác định bởi:

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} \tag{8.12}$$

(p_i và z_i là các cực và các zero của $G_0(z)$).

Qui tắc 7: Điểm tách nhập (nếu có) của quỹ đạo nghiệm số nằm trên trục thực và là nghiệm của phương trình:

$$\frac{dK}{dz} = 0 \tag{8.13}$$

Qui tắc 8: Giao điểm của quỹ đạo nghiệm số với đường tròn đơn vị có thể xác định bằng 1 trong 2 cách sau đây:

– Áp dụng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz mở rộng hoặc tiêu chuẩn Jury.

– Thay $z = a + jb$ (điều kiện: $a^2 + b^2 = 1$ do giao điểm nằm trên đường tròn đơn vị) vào phương trình đặc trưng (8.7), cân bằng phần thực và phần ảo sẽ tìm được giao điểm giữa QĐNS với đường tròn đơn vị và giá trị K_{gh}.

Qui tắc 9: Góc xuất phát của quỹ đạo nghiệm số tại cực phức p_j được xác định bởi:

$$\theta_j = 180^0 + \sum_{i=1}^{m} \arg(p_j - z_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \arg(p_j - p_i) \tag{8.14}$$

Dạng hình học của công thức trên là:

$$\theta_j = 180^0 + (\textstyle\sum \text{góc từ các zero đến cực } p_j)$$
$$- (\textstyle\sum \text{góc từ các cực còn lại đến cực } p_j) \tag{8.15}$$

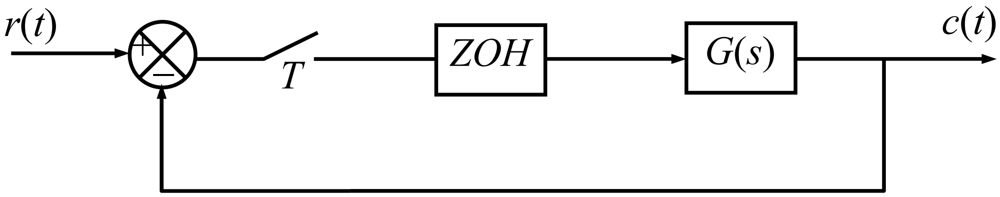
Qui tắc10: Tổng các nghiệm là hằng số khi K thay đổi từ $0 \to +\infty$.

Qui tắc11: Hệ số khuếch đại dọc theo quỹ đạo nghiệm số có thể xác định từ điều kiện biên độ:

$$\left| K \frac{N(z)}{D(z)} \right| = 1 \tag{8.16}$$

Sau đây chúng ta xét một thí dụ áp dụng các qui tắc vẽ QĐNS trên.

Thí dụ 8.3: Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ.



Biết rằng:

– Hàm truyền khâu liên tục là $G(s) = \dfrac{K}{s(s+5)}$

– Chu kỳ lấy mẫu: $T = 0.1\sec$

Hãy vẽ QĐNS của hệ thống trên khi K thay đổi từ 0 đến $+\infty$. Tính K_{gh}.

Lời giải:

Phương trình đặc trưng của hệ có sơ đồ khối như trên là:

$$1 + G(z) = 0$$

Trong đó:

- $G(z) = \mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\}$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+5)}\right\}$$

$$= \frac{K}{5}(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{5}{s^2(s+5)}\right\}$$

$$= \frac{K}{5}\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z[(0.5-1+e^{-0.5})z+(1-e^{-0.5}-0.5e^{-0.5})]}{5(z-1)^2(z-e^{-0.5})}\right)$$

$\Rightarrow \quad G(z) = K\dfrac{0.021z + 0.018}{(z-1)(z-0.607)}$

$\Rightarrow$ Phương trình đặc trưng là:

$$1 + K\frac{0.0042z + 0.0036}{(z-1)(z-0.607)} = 0 \qquad (*)$$

– Các cực: $p_1 = 1,\ p_2 = 0.607$ $\quad (n = 2)$

– Các zero: $z_1 = -0.857$ $\quad (m = 1)$

– Góc tạo bởi tiệm cận và trục thực:

$$\alpha = \frac{(2l+1)\pi}{n-m} = \frac{(2l+1)\pi}{2-1} = \pi \qquad (l = 0)$$

– Giao điểm giữa tiệm cận với trục thực:

$$OA = \frac{\sum \text{cực} - \sum \text{zero}}{n-m} = \frac{(1+0.607)-(-0.857)}{2-1} = 2.464$$

– Điểm tách nhập là nghiệm của phương trình: $\dfrac{dK}{dz} = 0$.

Ta có:

(*) $\Rightarrow K = -\dfrac{(z-1)(z-0.607)}{0.021z + 0.018} = -\dfrac{z^2 - 1.607z + 0.607}{0.021z + 0.018}$

$$\Rightarrow \frac{dK}{dz} = -\frac{z^2 - 1.607z + 0.607}{0.021z + 0.018}$$

$$= -\frac{(2z - 1.607)(0.021z + 0.018) - (z^2 - 1.607z + 0.607)(0.021)}{(0.021z + 0.018)^2}$$

$$= -\frac{0.021z^2 + 0.036z - 0.042}{(0.021z + 0.018)^2}$$

Do đó: $\dfrac{dK}{dz} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z_1 = -2.506 \\ z_2 = 0.792 \end{cases}$

Cả hai nghiệm trên đều thuộc QĐNS nên QĐNS có 2 điểm tách nhập.

– Giao điểm của QĐNS với đường tròn đơn vị:

(*) $\Leftrightarrow \quad (z-1)(z-0.607) + K(0.021z + 0.018) = 0$

$\Leftrightarrow \quad z^2 + (0.021K - 1.607)z + (0.018K + 0.607) = 0$ (**)

<u>Cách 1</u>: Dùng tiêu chuẩn Routh–Hurwitz mở rộng:

Đổi biến $z = \dfrac{w+1}{w-1}$, thay vào phương trình (**) ta được:

$$\left(\frac{w+1}{w-1}\right)^2 + (0.021K - 1.607)\left(\frac{w+1}{w-1}\right) + (0.018K + 0.607) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 0.039Kw^2 + (0.786 - 0.036K)w + (3.214 - 0.003K) = 0$

Điều kiện để hệ thống ổn định là:

$$\begin{cases} K > 0 \\ 0.786 - 0.036K > 0 \\ 3.214 - 0.003K > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} K > 0 \\ K < 21.83 \\ K < 1071 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad K_{gh} = 21.83$$

Thay $K_{gh} = 21.83$ vào phương trình (**), ta được :

$$z^2 - 1.1485z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.5742 \pm j0.8187$$

Vậy giao điểm của QĐNS với vòng tròn đơn vị là:

$$z = 0.5742 \pm j0.8187$$

Cách 2: Thay $z = a + jb$ vào phương trình (**), ta được:

$$(a + jb)^2 + (0.021K - 1.607)(a + jb) + (0.018K + 0.607) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + j2ab - b^2 + (0.021K - 1.607)a + j(0.021K - 1.607)b + (0.018K + 0.607) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 + (0.021K - 1.607)a + (0.018K + 0.607) = 0 \\ j2ab + j(0.021K - 1.607)b = 0 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $a^2 + b^2 = 1$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + (0.021K - 1.607)a + (0.018K + 0.607) = 0 \\ j2ab + j(0.021K - 1.607)b = 0 \\ a^2 + b^2 = 0 \end{cases}$$

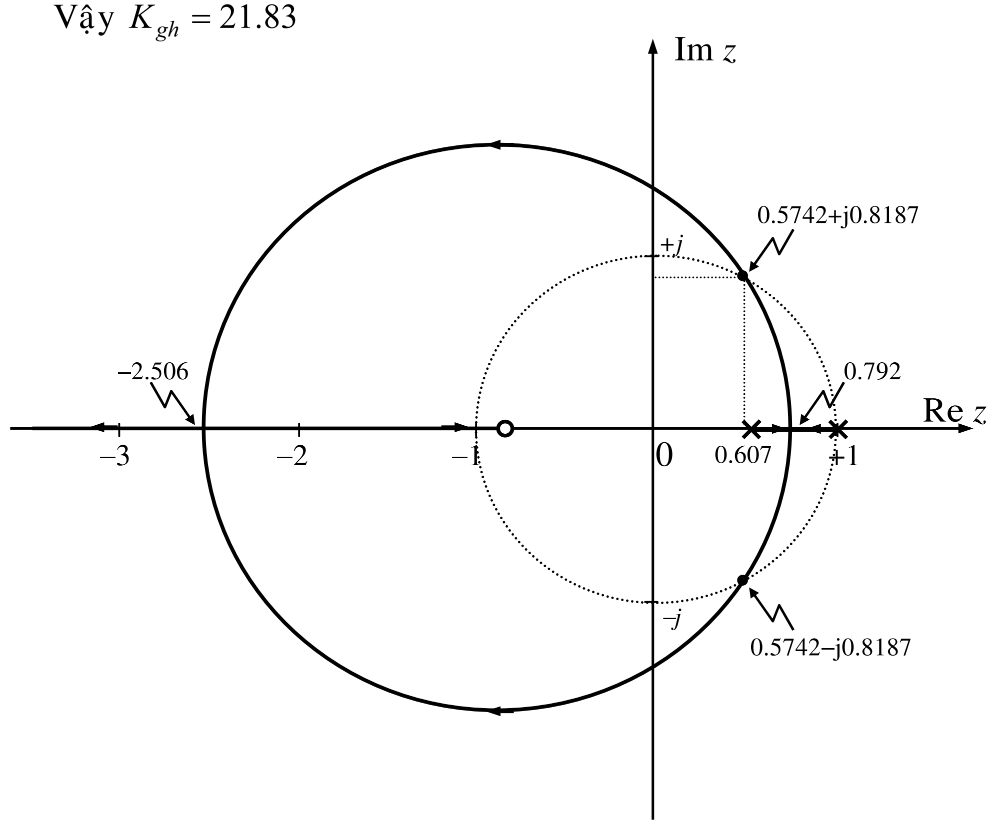
Giải hệ phương trình trên, ta được 4 giao điểm là:

$z = 1$, tương ứng với $K = 0$

$z = -1$, tương ứng với $K = 1071$

$z = 0.5742 \pm j0.8187$, tương ứng với $K = 21.8381$

Vậy $K_{gh} = 21.83$



Hình 8.3: *QĐNS của hệ thống ở thí dụ 8.3*

8.2. CHẤT LƯỢNG HỆ RỜI RẠC

8.2.1. Đáp ứng của hệ rời rạc

Tùy theo mô tả toán học hệ rời rạc mà ta có thể xác định được đáp ứng của hệ rời rạc bằng một trong hai cách sau đây:

• *Cách 1:* nếu hệ rời rạc mô tả bởi hàm truyền thì trước tiên ta tính $C(z)$, sau đó dùng phép biến đổi Z ngược để tìm $c(k)$.

• *Cách 2:* nếu hệ rời rạc mô tả bởi phương trình trạng thái thì trước tiên ta tính nghiệm $x(k)$ của phương trình trạng thái, sau đó suy ra $c(k)$.

Tương tự như hệ liên tục ta cũng có khái niệm cực quyết định cho hệ rời rạc. Đối với hệ liên tục, cặp cực quyết định là cặp cực nằm gần trục ảo nhất. Do quan hệ $z = e^{Ts}$, nên đối với hệ rời rạc cặp cực quyết định là cặp cực nằm gần vòng tròn đơn vị nhất. Hệ bậc cao có thể xấp xỉ gần đúng về hệ bậc hai với 2 cực là cặp cực quyết định.

8.2.2. Chất lượng quá độ

Có hai cách để đánh giá chất lượng quá độ của hệ rời rạc.

• *Cách 1:* Đánh giá chất lượng quá độ dựa vào đáp ứng của hệ thống.

Trước tiên ta phải tính được đáp ứng $c(k)$ của hệ thống (xem mục 8.2.1), sau áp dụng các công thức sau:

Tính độ vọt lố: dùng biểu thức định nghĩa:

$$POT = \frac{c_{\max} - c_{\text{xl}}}{c_{\text{xl}}} 100\% \tag{8.17}$$

trong đó: $c_{\max}$ là giá trị cực đại của $c(k)$.

c_{xl} là giá trị xác lập của $c(k)$.

Tính thời gian quá độ: gọi $k_{\text{qđ}}$ là thời điểm lấy mẫu mà từ đó trở đi đáp ứng $c(k)$ của hệ thống biến thiên không quá ε % so với giá trị xác lập c_{xl}, nghĩa là:

$$\left|c(k) - c_{\text{xl}}\right| \le \frac{\varepsilon . c_{\text{xl}}}{100}, \qquad \forall k \ge k_{\text{qđ}} \tag{8.18}$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{100}\right) c_{\text{xl}} \le c(k) \le \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right) c_{\text{xl}}, \qquad \forall k \ge k_{\text{qđ}} \tag{8.19}$$

Thời gian quá độ được xác định bằng công thức:

$$t_{qđ} = k_{qđ}.T \tag{8.20}$$

trong đó T là chu kỳ lấy mẫu của hệ rời rạc.

• *Cách 2:* Đánh giá chất lượng quá độ dựa vị trí cặp cực quyết định.

Cách này chỉ cho kết quả gần đúng và chỉ áp dụng được khi chu kỳ lấy mẫu T đủ nhỏ. Khi biết cặp cực quyết định $z^* = re^{\pm j\varphi}$ của hệ rời rạc là dựa vào quan hệ $z = e^{Ts}$ để suy ra nghiệm s^*, từ đó tính được hệ số tắt ξ và tần số dao động tự nhiên ω_n bằng các công thức:

$$\xi = \frac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2}} \tag{8.21}$$

$$\omega_n = \frac{1}{T}\sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2} \tag{8.22}$$

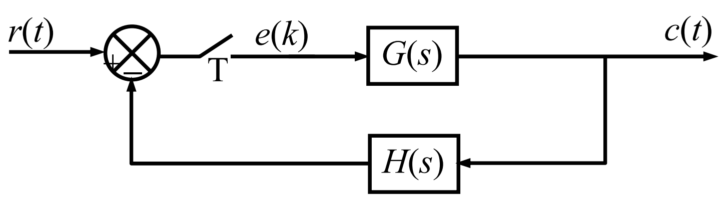
Sau đó áp dụng các công thức đã trình bày trong chương 5 để tính độ vọt lố, thời gian quá độ,...

8.2.3. Sai số xác lập

Theo định lý giá trị cuối, ta có:

$$e_{xl} = \lim_{k\to\infty} e(k) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})E(z) \tag{8.23}$$

Công thức trên là công thức tổng quát, có thể áp dụng cho mọi hệ rời rạc. Sau đây chúng ta khảo sát biểu thức sai số xác lập của hệ rời rạc lấy mẫu trong kênh sai số (hình 8.4), đây là hệ rời rạc thường gặp nhất trong thực tế.



Hình 8.4: *Hệ rời rạc lấy mẫu trong kênh sai số*

Nếu không có khâu lấy mẫu, biểu thức sai số là:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{8.24}$$

Áp dụng các nguyên tắc đã trình bày ở mục 7.3.2.7, rời rạc hoá biểu thức (8.24) với khâu lấy mẫu nằm trong kênh sai số, ta được:

$$E(z) = \frac{R(z)}{1 + GH(z)} \tag{8.25}$$

Thay vào biểu thức (8.23) ta được:

$$e_{xl} = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{R(z)}{1 + GH(z)} \tag{8.26}$$

Ta thấy sai số không chỉ phụ thuộc vào cấu trúc và thông số của hệ thống mà còn phụ thuộc vào tín hiệu vào.

- Nếu tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị: $R(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$, thay vào biểu thức (8.26) ta được:

$$e_{xl} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{1 + GH(z)} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{z\to 1} GH(z)} \tag{8.27}$$

Đặt:
$$K_P = \lim_{z\to 1} GH(z) \tag{8.28}$$

K_P gọi là *hệ số vị trí*. Thay K_P vào biểu thức (8.27) ta được:

$$e_{xl} = \frac{1}{1 + K_P} \tag{8.29}$$

- Nếu tín hiệu vào là hàm dốc đơn vị: $R(z) = \dfrac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$, thay vào biểu thức (8.26) ta được:

$$e_{xl} = \lim_{z\to 1}\frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}}\frac{1}{1 + GH(z)} = \frac{T}{\lim\limits_{z\to 1}(1 - z^{-1})GH(z)} \tag{8.30}$$

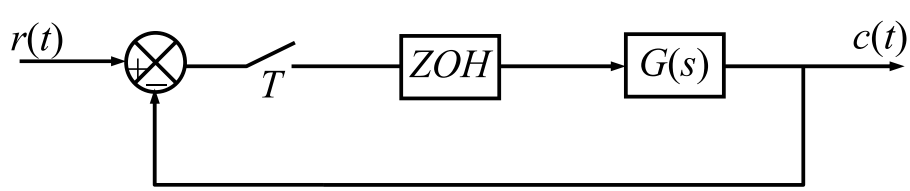
Đặt :
$$K_V = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})GH(z) \tag{8.31}$$

K_V gọi là *hệ số vận tốc*. Thay K_V vào biểu thức (8.31) ta được:

$$e_{xl} = \frac{1}{K_V} \tag{8.32}$$

Chúng ta vừa khảo sát các phương pháp đánh giá chất lượng hệ rời rạc. Sau đây là một số thí dụ áp dụng.

Thí dụ 8.4: Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ,



Trong đó:

– Hàm truyền khâu liên tục: $G(s) = \dfrac{K}{(s+a)(s+b)}$ $\quad (K = 10, a = 2, b = 3)$

– Chu kỳ lấy mẫu: $T = 0.1\text{sec}$

1. Tìm hàm truyền kín $G_k(z)$

2. Tính đáp ứng của hệ đối với tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị.

3. Đánh giá chất lượng của hệ thống: độ vọt lố, thời gian quá độ, sai số xác lập.

Lời giải:

1. Hàm truyền của hệ rời rạc:

$$G_k(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)}$$

Trong đó:

- $G(z) = \mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\}$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{(s+a)(s+b)}\right\}$$

$$= K(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+a)(s+b)}\right\}$$

$$= K\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z(Az+B)}{(z-1)(z-e^{-aT})(z-e^{-bT})}\right)$$

Với $\quad A = \dfrac{b(1-e^{-aT}) - a(1-e^{-bT})}{ab(b-a)}$

$$B = \frac{ae^{-aT}(1-e^{-bT}) - be^{-bT}(1-e^{-aT})}{ab(b-a)}$$

Thay $K = 10$, $a = 2$, $b = 3$, $T = 0.1$ ta được:

$$G(z) = \frac{0.042z + 0.036}{(z-0.819)(z-0.741)}$$

Do đó: $\quad G_k(z) = \dfrac{\dfrac{0.042z+0.036}{(z-0.819)(z-0.741)}}{1+\dfrac{0.042z+0.036}{(z-0.819)(z-0.741)}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_k(z) = \frac{0.042z + 0.036}{z^2 - 1.518z + 0.643}}$$

2. Đáp ứng của hệ:

$$C(z) = G_k(z)R(z)$$

$$= \frac{0.042z + 0.036}{z^2 - 1.518z + 0.643}R(z) = \frac{0.042z^{-1} + 0.036z^{-2}}{1 - 1.518z^{-1} + 0.643z^{-2}}R(z)$$

$$\Rightarrow \quad (1 - 1.518z^{-1} + 0.643z^{-2})C(z) = (0.042z^{-1} + 0.036z^{-2})R(z)$$

$$\Rightarrow \quad c(k) - 1.518c(k-1) + 0.643c(k-2) = 0.042r(k-1) + 0.036r(k-2)$$

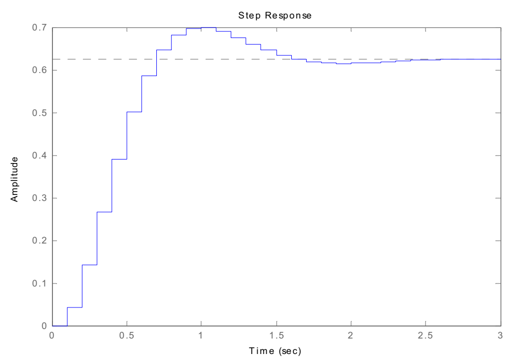
$$\Rightarrow \quad \boxed{c(k) = 1.518c(k-1) - 0.643c(k-2) + 0.042r(k-1) + 0.036r(k-2)}$$

Với điều kiện đầu: $c(-1) = c(-2) = 0$

$r(-1) = r(-2) = 0$

Thay vào công thức đệ qui trên, ta tính được:

$$c(k) = \{0; 0.0420; 0.1418; 0.2662; 0.3909; 0.5003; 0.5860; 0.6459; 0.6817;... \\ 0.6975; 0.6985; 0.6898; 0.6760; 0.6606; 0.6461; 0.6341; 0.6251; 0.6191;...\}$$



Hình 8.5: *Đáp ứng nấc đơn vị của hệ thống khảo sát ở thí dụ 8.4*

3. Đánh giá chất lượng của hệ thống:

Giá trị xác lập của đáp ứng quá độ là:

$$c_{xl} = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})C(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})G_k(z)R(z)$$

$$= \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\left(\frac{0.042z + 0.036}{z^2 - 1.518z + 0.643}\right)\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)$$

$$= \lim_{z\to 1}\left(\frac{0.042z + 0.036}{z^2 - 1.518z + 0.643}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_{xl} = 0.624}$$

• Độ vọt lố:

$$POT = \frac{c_{\max} - c_{\text{xl}}}{c_{\text{xl}}} 100\% = \frac{0.6985 - 0.624}{0.624} 100\%$$

$\Rightarrow \quad \boxed{POT = 11.94\%}$

• Thời gian quá độ theo chuẩn 5%.

Theo kết quả tính đáp ứng của hệ thống ở trên ta thấy:

$(1 - 0.05)c_{\text{xl}} \le c(k) \le (1 + 0.05)c_{\text{xl}}$

$\Leftrightarrow \quad 0.593 \le c(k) \le 0.655, \qquad \forall k \ge 14$

$\Rightarrow \quad k_{\text{qđ}} = 14$

$\Rightarrow \quad t_{\text{qđ}} = k_{\text{qđ}} T = 14 \times 0.1$

$\Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{qđ}} = 1.4 \sec}$

• Sai số xác lập: do hệ hồi tiếp âm đơn vị nên ta có thể tính sai số xác lập bằng công thức

$$e_{\text{xl}} = r_{\text{xl}} - c_{\text{xl}} = 1 - 0.624$$

$\Rightarrow \quad \boxed{e_{\text{xl}} = 0.376}$

Để so sánh ta có thể tính lại độ vọt lố và thời gian quá độ dựa vào vị trí cặp cực phức. Cặp cực phức của hệ là nghiệm của phương trình đặc trưng:

$$z^2 - 1.518z + 0.643 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad z = 0.7590 \pm j0.2587 = 0.8019\angle 0.3285$

Do đó:

$$\xi = \frac{-\ln r}{\sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2}} = \frac{-\ln 0.8019}{\sqrt{(\ln 0.8019)^2 + 0.3285^2}} = 0.5579$$

$$\omega_n = \frac{1}{T}\sqrt{(\ln r)^2 + \varphi^2} = \frac{1}{0.1}\sqrt{(\ln 0.8019)^2 + 0.3285^2} = 0.3958$$

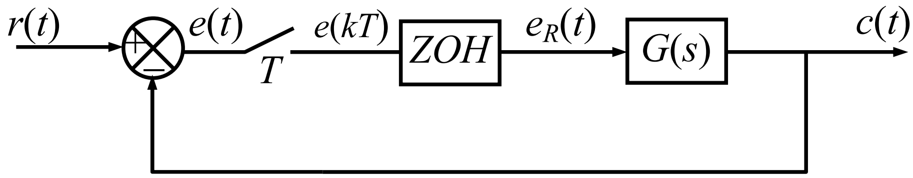
Vì vậy:

$$POT = \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right).100\% = \exp\left(-\frac{0.5579 \times 3.14}{\sqrt{1 - 0.5579^2}}\right).100\% = 12.11\%$$

$$t_{\text{qđ}} = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{3}{0.5579 \times 0.3958} = 1.36 \sec$$

Kết quả trên cho thấy hai phương pháp đánh giá chất lượng quá độ dựa vào đáp ứng của hệ thống và dựa vào vị trí cặp cực phức quyết định cho kết quả hoàn toàn phù hợp nhau. ■

Thí dụ 8.5: Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ.



Trong đó:

– Hàm truyền khâu liên tục: $G(s)=\dfrac{K(s+a)}{(s+b)(s+c)}$

$$(K=2\,,a=5\,,b=2\,,c=3)$$

– Chu kỳ lấy mẫu: $T=0.1\text{sec}$

1. Thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống trên.

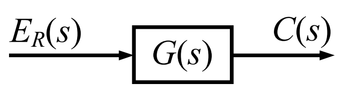
2. Tính đáp ứng của hệ đối với tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị (điều kiện đầu bằng 0) dựa vào phương trình trạng thái vừa tìm được.

3. Tính độ vọt lố, thời gian quá độ, sai số xác lập.

Lời giải:

1. Thành lập hệ phương trình trạng thái mô tả hệ thống theo trình tự 4 bước đã trình bày ở mục 7.4.3.

Bước 1: Hệ phương trình trạng thái của khâu liên tục:



Có nhiều cách thành lập phương trình trạng thái hệ liên tục, trong thí dụ này ta áp dụng phương pháp tọa độ pha. Ta có:

$$G(s)=\frac{C(s)}{E_R(s)}=\frac{2(s+5)}{(s+2)(s+3)}=\frac{2s+10}{s^2+5s+6}$$

Đặt biến phụ $Y(s)$ sao cho:

$$C(s)=(2s+10)Y(s) \quad\Rightarrow\quad c(t)=2\dot{y}(t)+10y(t) \qquad (*)$$

$$E_R(s)=(s^2+5s+6)Y(s) \quad\Rightarrow\quad e_R(t)=\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t) \qquad (**)$$

Đặt: $x_1(t)=y(t)$

$$x_2(t)=\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t) \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)$$

Thay các biến trạng thái vào phương trình (**), ta được:

$$e_R(t)=\dot{x}_2(t)+5x_2(t)+6x_1(t)$$

$$\Rightarrow \qquad x_2(t)=-6x_1(t)-5x_2(t)+e_R(t)$$

Kết hợp phương trình trên với cách đặt biến trạng thái, ta được hệ phương trình trạng thái viết dưới dạng ma trận như sau:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}}e_R(t)$$

Thay các biến trạng thái vào phương trình (*) ta được:

$$c(t)=10x_1(t)+2x_2(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}10 & 2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

<u>Bước 2</u>: Tính ma trận quá độ:

- $\Phi(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\right)^{-1}=\left(\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix}\right)^{-1}$

$$=\frac{1}{s(s+5)-6}\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -6 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{-6}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

- $\Phi(t)=\mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{6}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}\right\}$

$$=\begin{bmatrix}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s+2}-\dfrac{2}{s+3}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+3}\right\}\\ \mathscr{L}^{-1}\left\{-\dfrac{6}{s+2}+\dfrac{6}{s+3}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{-\dfrac{2}{s+2}+\dfrac{3}{s+3}\right\}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \Phi(t)=\begin{bmatrix}(3e^{-2t}-2e^{-3t}) & (e^{-2t}-e^{-3t})\\ (-6e^{-2t}+6e^{-3t}) & (-2e^{-2t}+3e^{-3t})\end{bmatrix}$$

<u>Bước 3</u>**:** Rời rạc hóa các phương trình trạng thái của hệ liên tục, ta được:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}[(k+1)T]=\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(kT)+\boldsymbol{B}_d e_R(kT)\\ c(kT)=\boldsymbol{D}_d\boldsymbol{x}(kT)\end{cases}$$

Trong đó:

- $\boldsymbol{A}_d=\Phi(T)=\begin{bmatrix}(3e^{-2t}-2e^{-3t}) & (e^{-2t}-e^{-3t})\\ (-6e^{-2t}+6e^{-3t}) & (-2e^{-2t}+3e^{-3t})\end{bmatrix}_{t=T=0.1}$

$$\Rightarrow\quad \boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix}0.9746 & 0.0779\\ -0.4675 & 0.5850\end{bmatrix}$$

$$\bullet \boldsymbol{B}_d = \int_0^T \Phi(\tau)\boldsymbol{B}d\tau = \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} (3e^{-2\tau} - 2e^{-3\tau}) & (e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) \\ (-6e^{-2\tau} + 6e^{-3\tau}) & (-2e^{-2\tau} + 3e^{-3\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \right\}$$

$$= \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} (e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) \\ (-2e^{-2\tau} + 3e^{-3\tau}) \end{bmatrix} d\tau \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} (-\dfrac{e^{-2\tau}}{2} + \dfrac{e^{-3\tau}}{3}) \\ (e^{-2\tau} - e^{-3\tau}) \end{bmatrix}_0^{0.1}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0042 \\ 0.0779 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \boldsymbol{D}_d = \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>Bước 4</u>: Hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ thống rời rạc với tín hiệu vào $r(kT)$ là:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[(k+1)T] = \left[\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{D}_d\right]\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{B}_d r(kT) \\ c(kT) = \boldsymbol{D}_d\boldsymbol{x}(kT) \end{cases}$$

Trong đó:

$$\bullet \qquad \left[\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{D}_d\right] = \begin{bmatrix} 0.9746 & 0.0779 \\ -0.4675 & 0.5850 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0042 \\ 0.0779 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{D}_d\right] = \begin{bmatrix} 0.9326 & 0.0695 \\ -1.2465 & 0.4292 \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình trạng thái cần tìm là:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9326 & 0.0695 \\ -1.2465 & 0.4292 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0042 \\ 0.0779 \end{bmatrix} r(kT) \qquad (***)$$

$$c(k) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

2. Đáp ứng của hệ thống:

Trước tiên ta tìm nghiệm của phương trình trạng thái.

$$(***) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1(k+1) = 0.9326x_1(k) + 0.0695x_2(k) + 0.0042r(k) \\ x_2(k+1) = -1.2465x_1(k) + 0.4292x_2(k) + 0.0779r(t) \end{cases}$$

Với điều kiện đầu $x_1(-1) = x_2(-1) = 0$, thay vào hai công thức đệ qui trên, ta được nghiệm của phương trình trạng thái là:

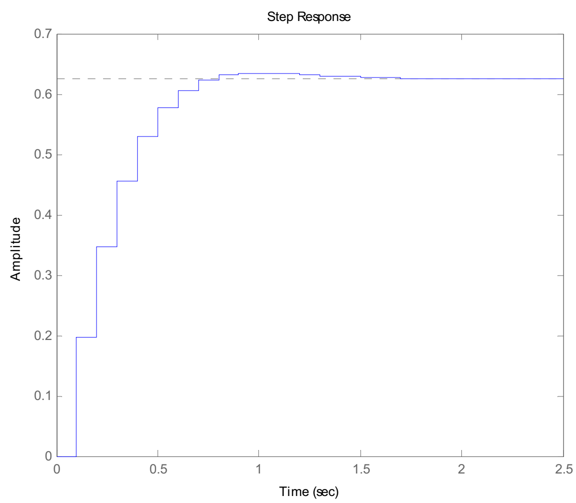
$$x_1(k) = 10^{-3} \times \{0; 4.2; 13.5; 24.2; 34.2; 42.6; 49.1; 54.0; 57.4; 59.7; \\ 61.2; 62.0; 62.5; 62.7; 62.8; 62.8; 62.7; 62.7; 62.6; 62.6 ...\}$$

$$x_2(k) = 10^{-3} \times \{0; 77.9; 106.1; 106.6; 93.5; 75.4; 57.2; 41.2; 28.3; 18.5; \\ 11.4; 6.5; 3.4; 1.4; 0.3; -0.3; -0.5; -0.5; -0.5; -0.4 ...\}$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$c(k) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = 10x_1(k) + 2x_2(k)$$

$$\Rightarrow \quad c(k) = \{0; 0.198; 0.348; 0.455; 0.529; 0.577; 0.606; 0.622; 0.631; 0.634; \\ 0.635; 0.634; 0.632; 0.630; 0.629; 0.627; 0.627; 0.626; 0.625; 0.625...\}$$



Hình 8.6: *Đáp ứng nấc đơn vị của hệ thống khảo sát ở thí dụ 8.5*

3. Đánh giá chất lượng của hệ thống

Theo kết quả tính đáp ứng ở trên ta thấy:

– Giá trị cực đại của đáp ứng là: $c_{\max} = 0.635$

– Giá trị xác lập của đáp ứng là: $c_{\text{xl}} = 0.635$

• Độ vọt lố của hệ thống là:

$$POT = \frac{c_{\max} - c_{\text{xl}}}{c_{\text{xl}}} 100\% = \frac{0.635 - 0.625}{0.625} 100\%$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{POT = 1.6\%}$$

• Thời gian quá độ theo chuẩn 5%.

Theo kết quả tính đáp ứng của hệ thống ở trên ta thấy:

$$(1 - 0.05)c_{\text{xl}} \le c(k) \le (1 + 0.05)c_{\text{xl}}$$

$\Leftrightarrow \quad 0.594 \le c(k) \le 0.656, \qquad \forall k \ge 6$

$\Rightarrow \quad k_{\text{qđ}} = 6$

$\Rightarrow \quad t_{\text{qđ}} = k_{\text{qđ}} T = 6 \times 0.1$

$\Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{qđ}} = 0.6 \sec}$

- Sai số xác lập là:

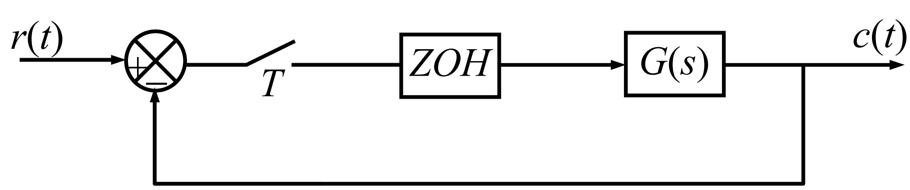
$e_{\text{xl}} = r_{\text{xl}} - c_{\text{xl}} = 1 - 0.625$

$\Rightarrow \quad \boxed{e_{\text{xl}} = 0.375}$ ■

8.2.4. Ảnh hưởng của chu kỳ lấy mẫu đến chất lượng hệ rời rạc

Chu kỳ lấy mẫu *T* ảnh hưởng rất lớn đến tính ổn định và chất lượng của hệ rời rạc. *T* càng lớn thì hệ thống càng dao động, độ vọt lố càng cao, thời gian quá độ càng lớn. Nếu *T* lớn hơn một giá trị giới hạn nào đó thì hệ thống sẽ trở nên mất ổn định. Vì vậy chọn chu kỳ lấy mẫu thích hợp có ý nghĩa rất lớn khi thiết kế hệ rời rạc. Định lý Shanon khẳng định tần số lấy mẫu chỉ cần lớn hơn 2 lần tần số cắt của hệ thống thì có thể phục hồi được dữ liệu mà không bị méo dạng, tuy nhiên tín hiệu chỉ không bị méo dạng nếu ta phục hồi dữ liệu bằng khâu giữ có dạng hàm $\dfrac{\sin(x)}{x}$, độc giả tham khảo thêm các tài liệu về xử lý tín hiệu số để biết thêm chi tiết về vấn đề này. Trong các hệ thống điều khiển thực tế do ta thường phục hồi dữ liệu bằng khâu giữ ZOH nên để việc lấy mẫu ảnh hưởng khâu đáng kể đến chất lượng của hệ thống ta cần chọn tần số lấy mẫu lớn hơn 10 lần tần số cắt của hệ thống. Thí dụ dưới đây minh họa ảnh hưởng của chu kỳ lấy mẫu *T*.

Thí dụ 8.6: Cho hệ thống điều khiển có sơ đồ khối như hình vẽ,



Trong đó hàm truyền khâu liên tục là $G(s) = \dfrac{K}{(s+a)} \quad (K = 10, a = 1)$

1. Xác định giá trị chu kỳ lấy mẫu giới hạn T_{gh}.

2. Khảo sát đáp ứng của hệ thống khi tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị trong các trường hợp T=0.1T_{gh}; T=0.5T_{gh}; T=0.6T_{gh} ;T=1.1T_{gh}.

Lời giải:

1. Xác định chu kỳ lấy mẫu giới hạn T_{gh}

Hàm truyền kín của hệ thống:

$$G_k(z) = \frac{G_h(z)}{1+G_h(z)} \qquad (*)$$

Trong đó:

- $G_h(z) = \mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\}$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{(s+a)}\right\} = K(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s(s+a)}\right\}$$

$$= K(1-z^{-1})\frac{z(1-e^{-aT})}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$$

$$\Rightarrow \qquad G_h(z) = \frac{K(1-e^{-aT})}{a(z-e^{-aT})}$$

Thay vào (*) ta được:

$$\Rightarrow \qquad G_k(z) = \frac{K(1-e^{-aT})}{a(z-e^{-aT})+K(1-e^{-aT})}$$

Phương trình đặc trưng của hệ thống là:

$$a(z-e^{-aT})+K(1-e^{-aT}) = 0$$

Giải phương trình trên, ta được cực của hệ là:

$$z = e^{-aT} - \frac{K}{a}(1-e^{-aT})$$

Điều kiện để hệ thống ổn định là cực phải nằm trong vòng tròn đơn vị:

$$|z|<1$$

$$\Leftrightarrow \qquad -1 < e^{-aT} - \frac{K}{a}(1-e^{-aT}) < 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad -1+\frac{K}{a} < \left(1+\frac{K}{a}\right)e^{-aT} < 1+\frac{K}{a}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{K-a}{K+a} < e^{-aT} < 1 \qquad (**)$$

Nếu $a \geq K$ dễ dàng thấy rằng (**) luôn thỏa mãn với mọi T nên hệ thống luôn ổn định.

Nếu $a < K$, giải (**) ta được:

$$T < -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{K-a}{K+a}\right)$$

Suy ra: $$T_{\text{gh}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{K-a}{K+a}\right)$$

Thay số cụ thể: $K = 10$, $a = 1$ ta được:

$$\boxed{T_{\text{gh}} = 0.2\,\text{sec}}$$

2. Khảo sát đáp ứng của hệ thống khi T=0.02; T=0.1; T=0.12; T=0.22

Đáp ứng của hệ thống là:

$$C(z) = G_k(z)R(z) = \frac{K(1-e^{-aT})}{a(z-e^{-aT}) + K(1-e^{-aT})}R(z)$$

$$= \frac{(K/a)(1-e^{-aT})z^{-1}}{1+[(K/a)(1-e^{-aT}) - e^{-aT}]z^{-1}}R(z) = \frac{Az^{-1}}{1+Bz^{-1}}R(z)$$

trong đó: $A = (K/a)(1-e^{-aT})$

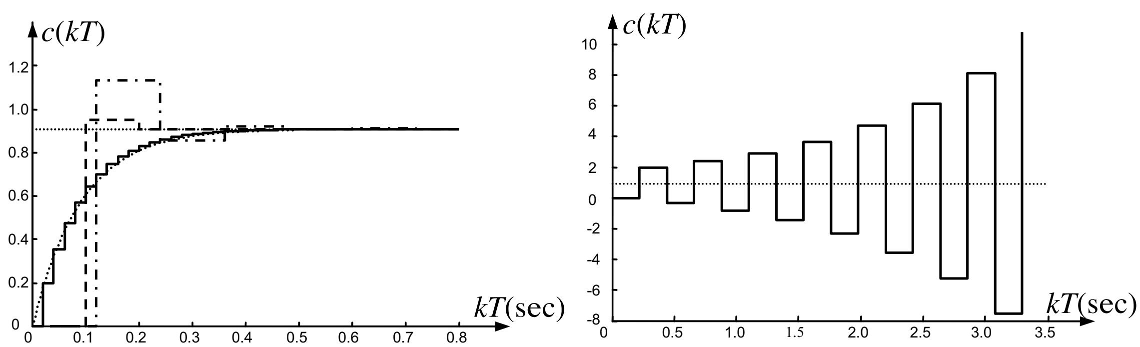
$$B = [(K/a)(1-e^{-aT}) - e^{-aT}]$$

Suy ra:

$$(1+Bz^{-1})C(z) = Az^{-1}R(z)$$

$$\Rightarrow \qquad c(k) = -Bc(k-1) + Ar(k-1) \qquad (***)$$

Thay giá trị cụ thể *K*, *a*, *T* ta tính được các hệ số *A* và *B*, sau đó sử dụng công thức đệ qui (***) với điều kiện đầu bằng 0 và tín hiệu vào *r*(*k*) là hàm nấc đơn vị ta tính được giá trị cụ thể của đáp ứng *c*(*k*). Đọc giả tự thực hiện phần tính toán này.



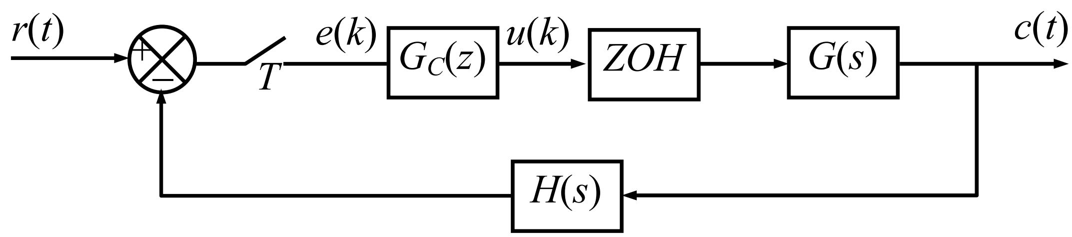
Hình 8.7: *Đáp ứng nấc đơn vị của hệ thống khảo sát ở thí dụ 8.6*

Hình 8.7 minh họa đáp ứng của hệ thống. Ta thấy khi T rất nhỏ hơn T_{gh} thì đáp ứng của hệ rời rạc gần giống đáp ứng của hệ liên tục, T càng tăng độ vọt lố càng lớn, T lớn hơn T_{gh} thì hệ thống không ổn định. ■

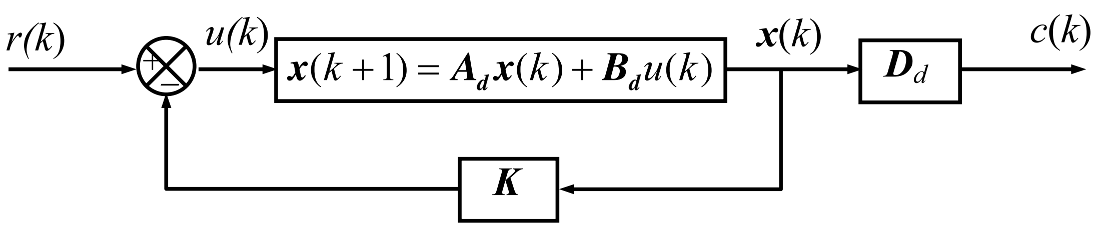
8.3. THIẾT KẾ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

8.3.1. Khái niệm

Có nhiều sơ đồ điều khiển khác nhau có thể áp dụng cho hệ rời rạc, trong đó sơ đồ điều khiển thông dụng nhất là hiệu chỉnh nối tiếp (hình 8.8) với bộ điều khiển $G_C(z)$ là bộ điều khiển sớm–trể pha số, PID số,... Một sơ đồ điều khiển khác cũng được sử dụng rất phổ biến là điều khiển hồi tiếp trạng thái (hình 8.9).



Hình 8.8: *Hiệu chỉnh nối tiếp dùng bộ điều khiển rời rạc*



Hình 8.9: *Hệ thống điều khiển hồi tiếp trạng thái*

Thiết kế bộ điều khiển rời rạc là xác định hàm truyền $G_C(z)$ hoặc độ lợi hồi tiếp trạng thái $\boldsymbol{K}$ để hệ thống thỏa mãn yêu cầu về độ ổn định, chất lượng quá độ, sai số xác lập. Thực tế trong đa số trường hợp bộ điều khiển số các thuật toán phần mềm chạy trên máy tính PC hoặc vi xử lý. Từ hàm truyền $G_C(z)$ hoặc giá trị độ lợi $\boldsymbol{K}$ ta suy ra được phương trình sai phân mô tả quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra của bộ điều khiển. Quan hệ này được sử dụng để lập trình phần mềm điều khiển chạy trên máy tính hoặc vi xử lý.

Có nhiều phương pháp được sử dụng để thiết kế bộ điều khiển số, trong quyển sách này chỉ đề cập phương pháp thiết kế dùng quỹ đạo nghiệm số, phương pháp thiết kế bộ điều khiển PID, phương pháp phân bố cực thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp trạng thái và phương pháp giải tích.

8.3.2. Hàm truyền của các khâu hiệu chỉnh

8.3.2.1. Khâu tỉ lệ:

$$G_P(z) = K_P \tag{8.33}$$

8.3.2.2. Khâu vi phân

Hình 8.10: *Khâu vi phân*

• Khâu vi phân liên tục: $u(t) = K_D \dfrac{de(t)}{dt}$

• Khâu vi phân rời rạc: được tính bằng các công thức sai phân, có 3 cách tính:

– Sai phân tới:

$$u(k) = K_D \frac{e(k+1) - e(k)}{T}$$

$$\Rightarrow \quad U(z) = K_D \frac{zE(z) - E(z)}{T} = \frac{K_D}{T}(z-1)E(z)$$

$$\Rightarrow \quad G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_D}{T}(z-1) \tag{8.34}$$

– Sai phân lùi:

$$u(k) = K_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T}$$

$$\Rightarrow \quad U(z) = K_D \frac{E(z) - z^{-1}E(z)}{T} = \frac{K_D}{T}(1 - z^{-1})E(z)$$

$$\Rightarrow \quad G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_D}{T}(1 - z^{-1}) = \frac{K_D}{T}\frac{z-1}{z} \tag{8.35}$$

– Sai phân giữa:

$$u(k) = K_D \frac{e(k+1) - e(k-1)}{2T}$$

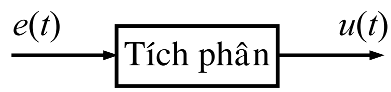
$$\Rightarrow \quad U(z) = K_D \frac{zE(z) - z^{-1}E(z)}{2T} = \frac{K_D}{2T}(z - z^{-1})E(z)$$

$$\Rightarrow \quad G_D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_D}{2T}(z - z^{-1}) = \frac{K_D}{2T}\frac{z^2-1}{z} \tag{8.36}$$

Công thức sai phân tới và sai phân giữa cần tín hiệu $e(k+1)$ là tín hiệu sai số trong tương lai, mà trong các bài toán điều khiển thời gian thực ta không thể có được tín hiệu trong tương lai (trừ khi sử dụng bộ dự báo) nên thực tế chỉ có công thức sai phân lùi được sử dụng phổ biến nhất, do đó trong quyển sách này chúng ta mô tả khâu vi phân bằng hàm truyền:

$$G_D(z) = \frac{K_D}{T}\frac{z-1}{z} \tag{8.37}$$

8.3.2.3. Khâu tích phân



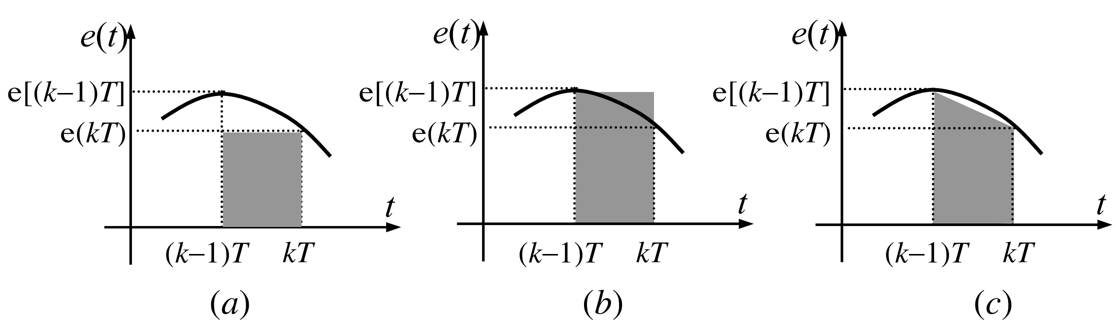
Hình 8.11: *Khâu tích phân*

- Khâu tích phân liên tục: $u(t) = K_I \int_0^t e(t)dt$
- Khâu tích phân rời rạc:

$$u(kT) = K_I \int_0^{kT} e(t)dt = K_I \int_0^{(k-1)T} e(t)dt + K_I \int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt$$

$$\Rightarrow \qquad u(kT) = u[(k-1)T] + K_I \int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt \tag{8.38}$$

Xét tích phân $\int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt$: có 3 cách tính



Hình 8.12: *Tích phân gần đúng*

(a) *Tích phân hình chữ nhật tới*

(b) *Tích phân hình chữ nhật lùi*

(b) *Tích phân hình thang*

– Tích phân hình chữ nhật tới:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt \approx Te(kT) \tag{8.39}$$

Thay vào công thức (8.38), ta được:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + K_I Te(kT)$$

$$\Rightarrow \quad U(z) = z^{-1}U(z) + K_I TE(z)$$

$$\Rightarrow \quad (1 - z^{-1})U(z) = K_I TE(z)$$

$$\Rightarrow \quad G_I(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_I T \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

– Tích phân hình chữ nhật lùi:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt \approx Te[(k-1)T] \tag{8.40}$$

Thay vào công thức (8.38), ta được:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + K_I Te[(k-1)]T$$

$$\Rightarrow \quad U(z) = z^{-1}U(z) + K_I Tz^{-1}E(z)$$

$$\Rightarrow \quad (1 - z^{-1})U(z) = K_I Tz^{-1}E(z)$$

$$\Rightarrow \quad G_I(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_I T \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} \tag{8.41}$$

– Tích phân hình thang:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} e(t)dt \approx \frac{T\big(e[(k-1)T] + e(kT)\big)}{2} \tag{8.42}$$

Thay vào công thức (8.38), ta được:

$$u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{K_I T}{2}\big(e[(k-1)]T + e(kT)\big)$$

$$\Rightarrow \quad U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{K_I T}{2}\big(z^{-1}E(z) + E(z)\big)$$

$$\Rightarrow \quad (1 - z^{-1})U(z) = \frac{K_I T}{2}\big(z^{-1} + 1\big)E(z)$$

$$\Rightarrow \quad G_I(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_I T}{2}\frac{z^{-1} + 1}{1 - z^{-1}} = \frac{K_I T}{2}\frac{z + 1}{z - 1} \tag{8.43}$$

Trong 3 cách tính tích phân trình bày ở trên, tích phân hình thang cho kết quả chính xác nhất, do đo thực tế người ta thường sử dụng công thức:

$$G_I(z) = \frac{K_I T}{2}\frac{z + 1}{z - 1} \tag{8.44}$$

8.3.2.4. Bộ điều khiển PI, PD, PID rời rạc

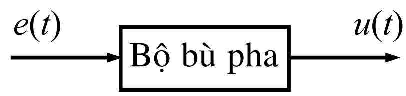
Từ các hàm truyền rời rạc cơ bản vừa phân tích ở trên, ta rút ra được hàm truyền của bộ điều khiển PI, PD, PID rời rạc như sau:

$$G_{PI}(z) = K_P + \frac{K_I T}{2}\frac{z+1}{z-1} \tag{8.45}$$

$$G_{PD}(z) = K_P + \frac{K_D}{T}\frac{z-1}{z} \tag{8.46}$$

$$G_{PID}(z) = K_P + \frac{K_I T}{2}\frac{z+1}{z-1} + \frac{K_D}{T}\frac{z-1}{z} \tag{8.47}$$

8.3.2.5. Bộ điều khiển bù pha (sớm pha, trể pha)



Hình 8.13: *Khâu hiệu chỉnh bù pha*

Hàm truyền của bộ điều khiển bù pha liên tục có dạng:

$$G_C(s) = K\frac{s+a}{s+b} \tag{8.48}$$

nếu $a>b$ thì $G_C(s)$ là khâu trể pha, $a<b$ thì $G_C(s)$ là khâu sớm pha

Rời rạc hóa quan hệ giữa ngõ vào và ngõ ra của bộ bù pha liên tục, sử dụng công thức tích phân hình thang, ta suy ra được hàm truyền của bộ bù pha rời rạc có dạng:

$$G_C(z) = K\frac{(aT+2)z+(aT-2)}{(bT+2)z+(bT-2)} \tag{8.49}$$

Hàm truyền trên có thể viết lại dưới dạng:

$$G_C(z) = K_C\frac{z+z_C}{z+p_C} \tag{8.50}$$

trong đó z_C là zero và p_C là cực của khâu hiệu chỉnh.

$$z_C = \frac{(aT-2)}{(aT+2)} \qquad \Rightarrow \qquad aT = \frac{2(1+z_C)}{(1-z_C)} \tag{8.51}$$

$$p_C = \frac{(bT-2)}{(bT+2)} \qquad \Rightarrow \qquad bT = \frac{2(1+p_C)}{(1-p_C)} \tag{8.52}$$

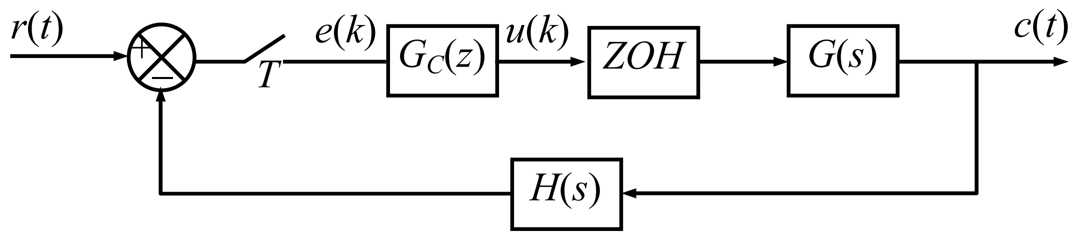
Do aT, bT dương từ quan hệ (8.51) và (8.52) suy ra cực và zero của khâu hiệu chỉnh phải thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} |z_C| < 1 \\ |P_C| < 1 \end{cases} \qquad (8.53)$$

Từ các quan hệ (8.51) và (8.52) ta cũng suy ra được $z_C < p_C$ nếu $G_C(z)$ là khâu sớm pha và $z_C > p_C$ nếu $G_C(z)$ là khâu trể pha.

8.3.3. Thiết kế hệ rời rạc dùng phương pháp QĐNS

8.3.3.1 Thiết kế bộ điều khiển sớm pha



Phương trình đặc trưng của hệ thống trước khi hiệu chỉnh là:

$$1 + GH(z) = 0$$

Phương trình đặc trưng của hệ thống sau khi hiệu chỉnh là:

$$1 + G_C(z)GH(z) = 0$$

Khâu hiệu chỉnh sớm pha có dạng:

$$G_C(z) = K_C \frac{z + z_C}{z + p_C}$$

Bài toán đặt ra là chọn giá trị K_C, z_C và p_C để đáp ứng của hệ thống thỏa mãn yêu cầu về chất lượng quá độ (chất lượng quá độ thể hiện qua vị trí của cặp cực quyết định). Nguyên tắc thiết kế tương tự như thiết kế hệ liên tục, nghĩa là sử dụng khâu hiệu chỉnh $G_C(z)$ để sửa dạng QĐNS của hệ thống sao cho QĐNS đi qua cặp cực mong muốn. Sau đây là trình tự thiết kế:

TRÌNH TỰ THIẾT KẾ

Bước 1: **Xác định cặp cực quyết định** từ yêu cầu thiết kế về chất lượng của hệ thống trong quá trình quá độ:

$$\begin{cases} \text{Độ vọt lố POT} \\ \text{Thời gian quá độ,...} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi \\ \omega_n \end{cases} \Rightarrow s^*_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow z^*_{1,2} = e^{Ts^*}$$

$$r = |z^*| = e^{-T\xi\omega_n} \qquad \varphi = \angle z^* = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Bước 2: **Xác định góc pha cần bù** để cặp cực quyết định $z_{1,2}^*$ nằm trên QĐNS của hệ thống sau khi hiệu chỉnh bằng công thức:

$$\phi^* = -180^0 + \sum_{i=1}^{n} \arg(z^* - p_i) - \sum_{i=1}^{m} \arg(z^* - z_i)$$

Dạng hình học của công thức trên là:

$$\phi^* = -180^0 + \sum \text{góc từ các cực của } GH(z) \text{ đến cực } z^*$$
$$- \sum \text{góc từ các zero của } GH(z) \text{ đến cực } z^*$$

Bước 3: **Xác định vị trí cực và zero của khâu hiệu chỉnh**

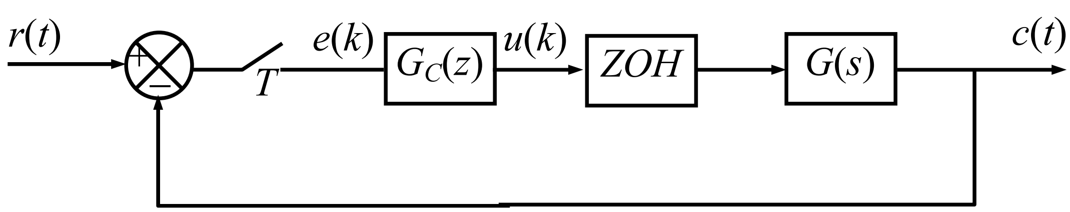
Vẽ 2 nữa đường thẳng bất kỳ xuất phát từ cực quyết định z^* sao cho 2 nữa đường thẳng này tạo với nhau một góc bằng ϕ^*. Giao điểm của hai nữa đường thẳng này với trục thực là vị trí cực và zero của khâu hiệu chỉnh.

Đối với hệ rời rạc, người ta thường áp dụng phương pháp triệt tiêu nghiệm cực của hệ thống để chọn cực và zero của khâu hiệu chỉnh.

Bước 4: **Tính K_C** bằng cách áp dụng công thức:

$$\left| G_C(z)GH(z) \right|_{z=z^*} = 1$$

Thí dụ 8.7: Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ,



trong đó:

– Hàm truyền khâu liên tục: $G(s) = \dfrac{10}{s(s+5)}$

– Chu kỳ lấy mẫu: $T = 0.1\text{sec}$

Hãy thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha sao cho hệ thống sao khi hiệu chỉnh có cặp cực quyết định với $\xi = 0.707$, $\omega_n = 10$ (rad/sec).

Lời giải:

- Phương trình đặc trưng của hệ trước khi hiệu chỉnh:

$$1 + G(z) = 0$$

trong đó:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+5)}\right\}$$

$$= K(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+5)}\right\}$$

$$= K\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z[(0.5-1+e^{-0.5})z+(1-e^{-0.5}-0.5e^{-0.5})]}{5(z-1)^2(z-e^{-0.5})}\right)$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = \frac{0.21z+0.18}{(z-1)(z-0.607)}$$

- Cặp cực quyết định mong muốn:

$$z_{1,2}^* = re^{\pm j\varphi}$$

Trong đó:

$$r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0.1\times0.707\times10} = 0.493$$

$$\varphi = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.1\times10\sqrt{1-0.707^2} = 0.707$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2}^* = 0.493e^{\pm j0.707} = 0.493[\cos(0.707) \pm j\sin(0.707)]$$

$$\Rightarrow \quad z_{1,2}^* = 0.493e^{\pm j0.707} = 0.375 \pm j0.320$$

- Góc pha cần bù:

$$\phi^* = -180 + (\beta_1 + \beta_2) - \beta_3$$

Dễ dàng tính được: $\beta_1 = 152.9^0$

$\beta_2 = 125.9^0$

$\beta_3 = 14.6^0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi^* = -180 + (152.9 + 125.9) - 14.6 = 84^0}$$

- Chọn cực và zero của khâu hiệu chỉnh bằng phương pháp triệt tiêu nghiệm.

$\Rightarrow \quad -z_C = 0.607 \Rightarrow \quad \boxed{z_C = -0.607}$

Tính cực của khâu hiệu chỉnh:

Ta có: $AB = PB\dfrac{\sin\phi^*}{\sin P\hat{A}B}$

Mà: $PB = \sqrt{(0.607-0.375)^2 + 0.320^2} = 0.388$

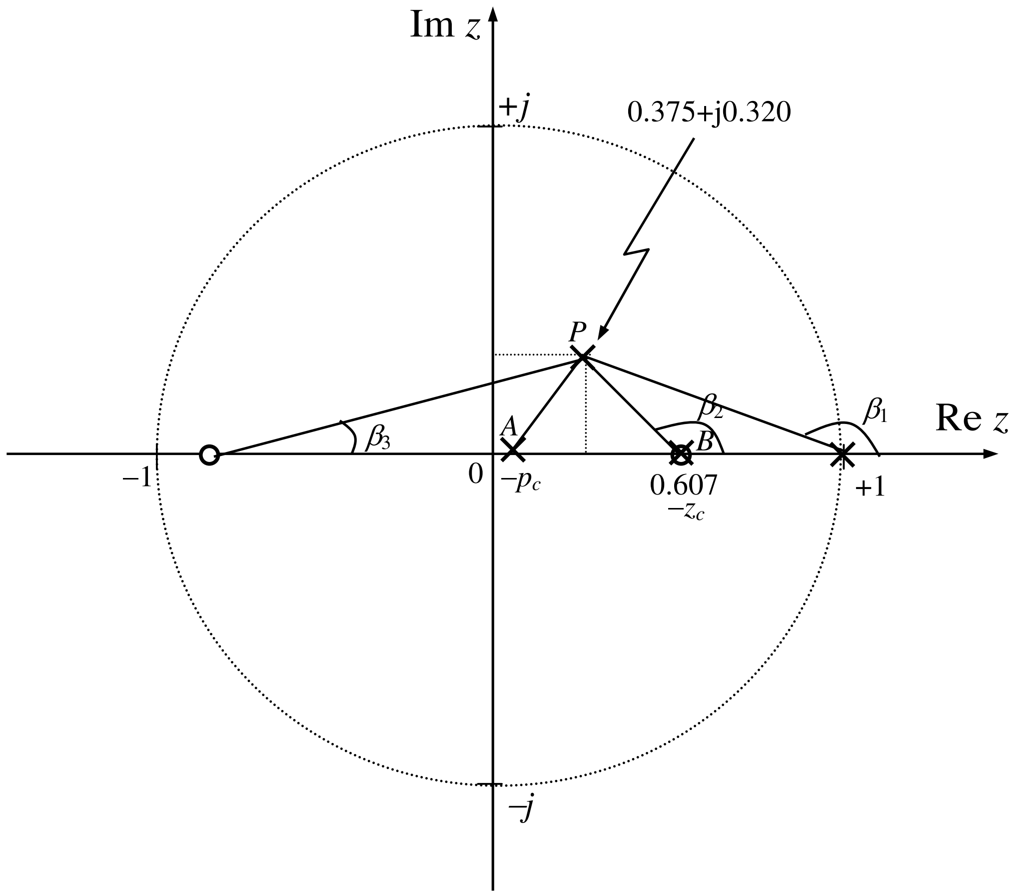
$$P\hat{A}B = \beta_2 - \phi^* = 125.9^0 - 84^0 = 41.9^0$$

$$\Rightarrow \qquad AB = 0.388\frac{\sin 84^0}{\sin 41.9^0} = 0.578$$

$$\Rightarrow \qquad -p_C = OA = OB - AB = 0.607 - 0.578 = 0.029$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{p_C = -0.029}$$

$$\Rightarrow \quad G_C(z) = K_C\frac{z - 0.607}{z - 0.029}$$



• Tính K_C từ điều kiện:

$$\left|G_C(z)G(z)\right|_{z=z^*} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left|K_C\frac{(z-0.607)}{(z-0.029)}\frac{(0.21z+0.18)}{(z-1)(z-0.607)}\right|_{z=0.375+j0.320} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left|K_C\frac{[0.21(0.375+j0.320)+0.18]}{(0.375+j0.320-0.029)(0.375+j0.320-1)}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \quad K_C \frac{0.267}{0.471 \times 0.702} = 1$$

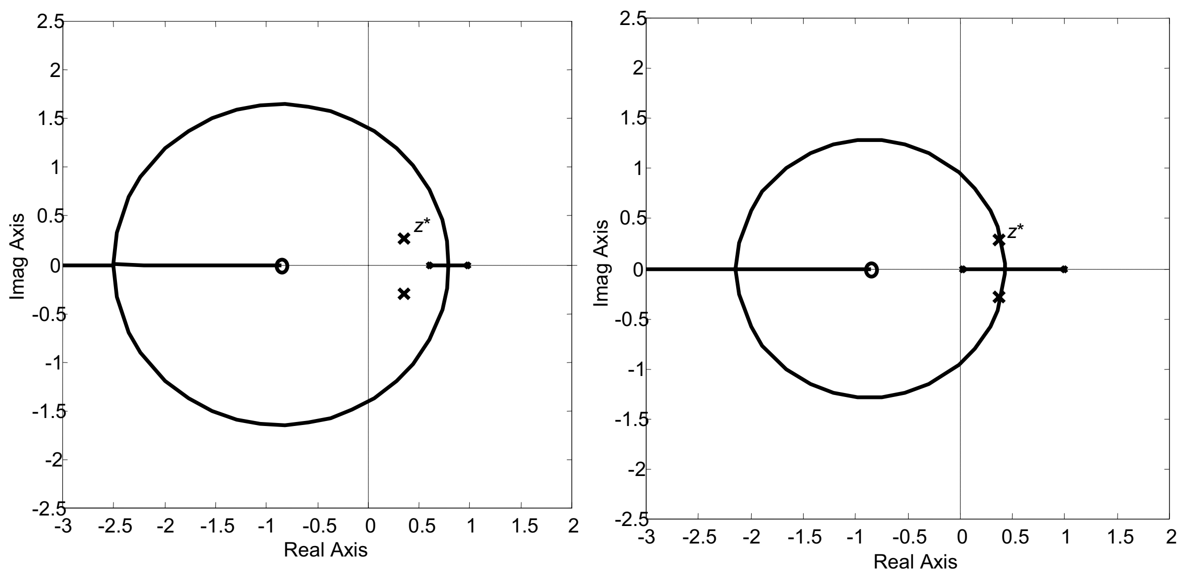
$$\Rightarrow \quad K_C \frac{0.267}{0.471 \times 0.702} = \frac{0.471 \times 0.702}{0.267} = 1.24$$

Vậy: $$\boxed{G_C(z) = 1.24 \frac{z - 0.607}{z - 0.029}}$$ ■

Nhận xét:

Quỹ đạo nghiệm số của hệ thống trước khi hiệu chỉnh <u>không qua điểm z^*</u>, do đó hệ thống sẽ không bao giờ đạt được chất lượng đáp ứng quá độ như yêu cầu dù có thay đổi hệ số khuếch đại của hệ thống.

Bằng cách sử dụng khâu hiệu chỉnh sớm pha, quỹ đạo nghiệm số của hệ thống bị sửa dạng và <u>qua điểm z^*</u>, do đó bằng cách chọn hệ số khuếch đại thích hợp (bước 4) hệ thống sẽ có cặp cực quyết định như mong muốn do đó đáp ứng quá độ đạt yêu cầu thiết kế.



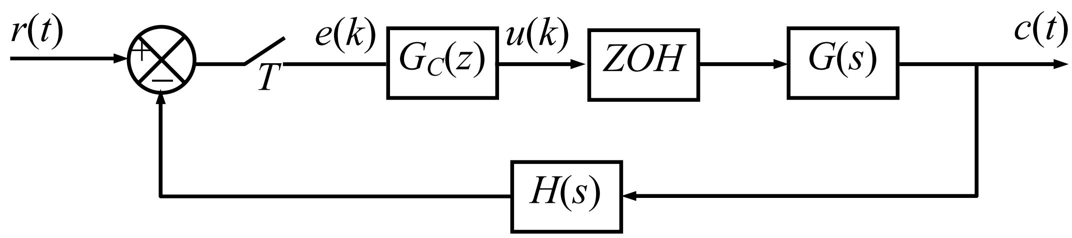
(a) *QĐNS trước khi hiệu chỉnh* (b) *QĐNS sau khi hiệu chỉnh*

Hình 8.14: *QĐNS của hệ thống ở thí dụ 8.7*

8.3.3.2 Thiết kế bộ điều khiển trễ pha

Ta sử dụng khâu hiệu chỉnh trễ pha khi muốn làm giảm sai số xác lập của hệ thống.

Xét hệ thống điều khiển có sơ đồ như hình vẽ



Khâu hiệu chỉnh $G_C(z)$ là khâu trễ pha:

$$G_C(z) = K_C \frac{z + z_C}{z + p_C} \qquad (z_C > p_C)$$

Bài toán đặt ra là chọn giá trị K_C, z_C và p_C để làm giảm sai số xác lập của hệ thống mà không ảnh hưởng đáng kể đến chất lượng đáp ứng quá độ.

Đặt:
$$\beta = \frac{1 + p_C}{1 + z_C}$$

Tương tự như đã làm đối với hệ liên tục, ta có trình tự thiết kế khâu hiệu chỉnh trễ pha cho hệ rời rạc như sau:

TRÌNH TỰ THIẾT KẾ

Bước 1: **Xác định β** từ yêu cầu về sai số xác lập.

- Nếu yêu cầu về sai số xác lập cho dưới dạng hệ số vị trí K_P^* thì:

$$\beta = \frac{K_P}{K_P^*}$$

(K_P : hệ số vị trí của hệ trước khi hiệu chỉnh
K_P^* : hệ số vị trí mong muốn)

- Nếu yêu cầu về sai số xác lập cho dưới dạng hệ số vận tốc K_V^* thì:

$$\beta = \frac{K_V}{K_V^*}$$

(K_V : hệ số vận tốc của hệ trước khi hiệu chỉnh
K_V^* : hệ số vận tốc mong muốn)

Bước 2: **Chọn zero** của khâu hiệu chỉnh **rất gần điểm +1** để không làm ảnh ảnh hưởng đáng kể đến dạng QĐNS, suy ra:

$$-z_C \approx 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{z_C \approx -1}$$

(Chú ý điều kiện: $|z_C| < 1$)

Bước 3: **Tính cực** của khâu hiệu chỉnh:

$$p_C = -1 + \beta(1 + z_C)$$

Bước 4: **Tính K_C** bằng cách áp dụng công thức:

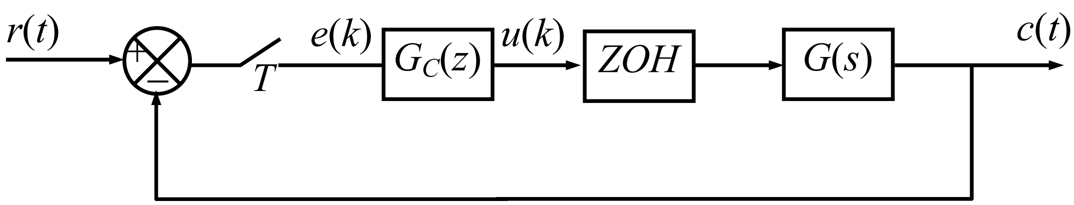
$$\left|G_C(z)GH(z)\right|_{z=z^*} = 1$$

Trong đó $z^*_{1,2}$ là cặp cực quyết định của hệ thống sau khi hiệu chỉnh. Do yêu cầu thiết kế không làm ảnh hưởng đáng kể đến đáp ứng quá độ nên có thể tính gần đúng:

$$z^*_{1,2} \approx z_{1,2}$$

với $z_{1,2}$ là cặp cực quyết định của hệ thống trước khi hiệu chỉnh.

Thí dụ 8.8: Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ khối như hình vẽ.



Hàm truyền khâu liên tục: $G(s) = \dfrac{10}{s(s+5)}$, chu kỳ lấy mẫu: $T = 0.1\text{sec}$

Hãy thiết kế khâu hiệu chỉnh trể pha sao cho hệ thống sao khi hiệu chỉnh có hệ số vận tốc là $K_V^* = 100$.

Lời giải:

- Phương trình đặc trưng của hệ trước khi hiệu chỉnh:

$$1 + G(z) = 0$$

trong đó:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)\}$$

$$= \mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K}{s(s+5)}\right\}$$

$$= K(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{1}{s^2(s+5)}\right\}$$

$$= K\left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z[(0.5-1+e^{-0.5})z+(1-e^{-0.5}-0.5e^{-0.5})]}{5(z-1)^2(z-e^{-0.5})}\right)$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = \frac{0.21z+0.18}{(z-1)(z-0.607)}$$

Cặp cực quyết định của hệ thống trước khi hiệu chỉnh là nghiệm của phương trình:

$$1+\frac{0.21z+0.18}{(z-1)(z-0.607)} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{z_{1,2} = 0.699 \pm j0.547}$$

Hệ số vận tốc của hệ thống trước khi hiệu chỉnh là:

$$K_V = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})GH(z)$$

$$\Rightarrow \quad K_V = \frac{1}{0.1}\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{0.21z+0.18}{(z-1)(z-0.607)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_V = 9.9}$$

Do đó: $\boxed{\beta = \frac{K_V}{K_V^*} = \frac{9.9}{100} = 0.099}$

Chọn zero của khâu hiệu chỉnh rất gần điểm +1:

$$-z_C = 0.99 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{z_C \approx -0.99}$$

Suy ra cực của khâu hiệu chỉnh:

$$p_C = -1+(1+z_C) = -1+0.099(1-0.99)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p_C = -0.999}$$

$$\Rightarrow \quad G_C(z) = K_C\frac{z-0.99}{z-0.999}$$

Tính K_C từ điều kiện:

$$\left|K_C\frac{(z-0.99)}{(z-0.999)}\frac{(0.21z+0.18)}{(z-1)(z-0.607)}\right|_{z=0.699+j0.547} = 1$$

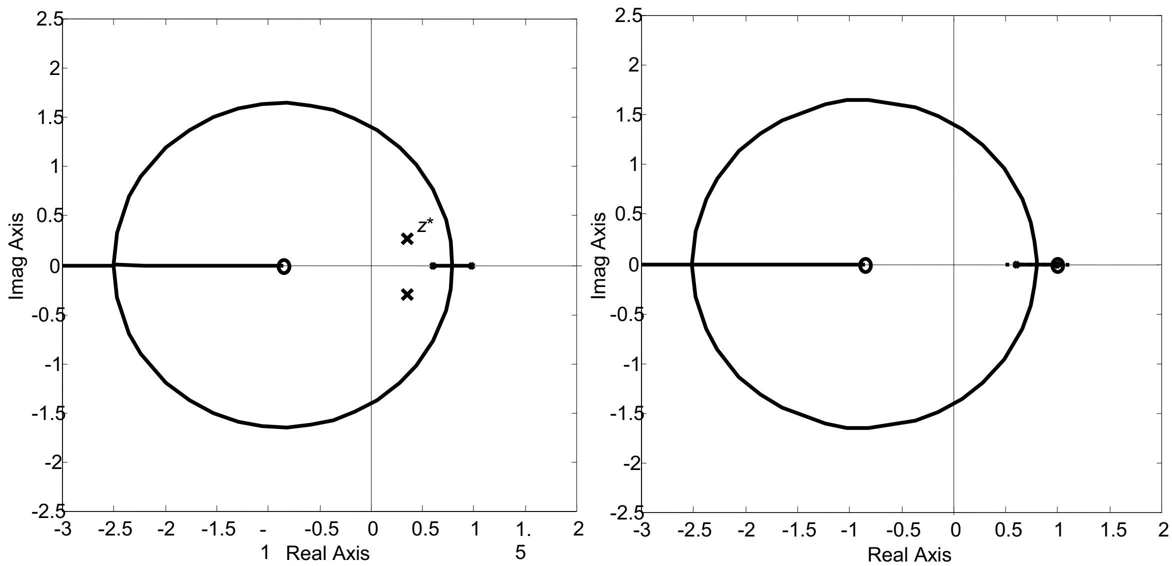
$$\Rightarrow \quad \left|K_C\frac{(0.699+j0.547-0.99)}{(0.699+j0.547-0.999)}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \quad K_C = \frac{0.6239}{0.6196} = 1.007 \approx 1$$

Vậy: $$\boxed{G_C(z) = \frac{z-0.99}{z-0.999}}$$ ■

Nhận xét

QĐNS của hệ thống trước và sau khi hiệu chỉnh gần giống nhau nên đáp ứng quá độ gần như không thay đổi.



(a) *QĐNS trước khi hiệu chỉnh* (b) *QĐNS sau khi hiệu chỉnh*

Hình 8.15: *QĐNS của hệ thống ở thí dụ 8.8*

8.3.3.3. Thiết kế bộ điều khiển sớm trễ pha

Hàm truyền khâu hiệu chỉnh sớm trễ pha cần thiết kế có dạng:

$$G_C(z) = G_{C1}(z)G_{C2}(z)$$

Trong đó $G_{C1}(z)$ là khâu hiệu chỉnh sớm pha

$G_{C2}(z)$ là khâu hiệu chỉnh trễ pha.

Bài toán đặt ra thiết kế $G_C(z)$ để cải thiện đáp ứng quá độ và sai số xác lập của hệ thống.

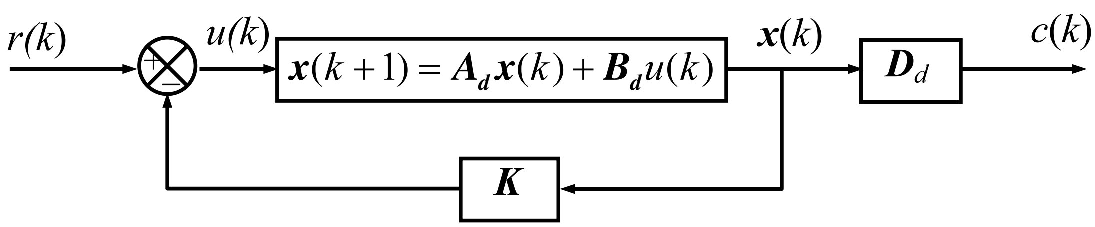
TRÌNH TỰ THIẾT KẾ

Bước 1: Thiết kế khâu sớm pha $G_{C1}(z)$ để thỏa mãn yêu cầu về đáp ứng quá độ (xem phương pháp thiết kế khâu hiệu chỉnh sớm pha ở mục 8.3.3.1).

Bước 2: Đặt $G_1(z) = G_{C1}(z).G(z)$.

Thiết kế khâu hiệu chỉnh trể pha $G_{C2}(z)$ mắc nối tiếp vào $G_1(z)$ để thỏa mãn yêu cầu về sai số xác lập mà không thay đổi đáng kể đáp ứng quá độ của hệ thống sau khi đã hiệu chỉnh sớm pha (xem phương pháp thiết kế khâu hiệu chỉnh trể pha ở mục 8.3.3.2)

8.3.4. THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN HỒI TIẾP TRẠNG THÁI



Cho đối tượng điều khiển được mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A_d}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B_d}u(k) \\ c(k) = \boldsymbol{D_d}\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

Tín hiệu điều khiển trong hệ hồi tiếp trạng thái là

$$u(k) = r(k) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k)$$

Hệ phương trình biến trạng thái mô tả hệ hồi tiếp trạng thái

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d[r(k) - \boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k)] \\ c(k) = \boldsymbol{D}_d\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = [\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{K}]\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k) = \boldsymbol{D}_d\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

Phương trình đặc trưng của hệ hồi tiếp trạng thái:

$$\boxed{\det[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{K}] = 0} \qquad (*)$$

<u>Người ta CM được rằng</u>: ***Nếu*** $\text{rank}(P) = n$, với n là bậc của hệ thống và $P = [\boldsymbol{B}_d \quad \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{B}_d \quad \boldsymbol{A}_d^2\boldsymbol{B}_d \quad \ldots \quad \boldsymbol{A}_d^{n-1}\boldsymbol{B}_d]$ ***thì*** HT trên điều khiển được, khi đó có thể tìm được vector $\boldsymbol{K}$ để phương trình đặc trưng (*) có nghiệm bất kỳ.

TRÌNH TỰ THIẾT KẾ

Bước 1: Viết phương trình đặc trưng của hệ thống sau khi hiệu chỉnh:

$$\det[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{K}] = 0 \qquad (1)$$

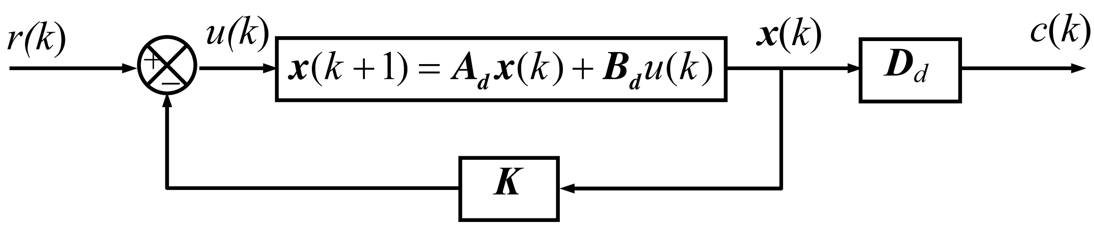
Bước 2: Viết phương trình đặc trưng mong muốn:

$$\prod_{i=1}^{n}(z - p_i) = 0 \qquad (2)$$

Trong đó p_i $(i = \overline{1..n})$ là các cực mong muốn

Bước 3: Cân bằng các hệ số của hai phương trình đặc trưng (1) và (2) tìm được vector độ lợi hồi tiếp ***K***.

Thí dụ 8.9: Cho hệ thống rời rạc như hình vẽ



Hệ phương trình biến trạng thái mô tả đối tượng là:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A_d x}(k) + \boldsymbol{B_d} u(k) \\ c(k) = \boldsymbol{D_d x}(k) \end{cases}$$

Trong đó: $\boldsymbol{A_d} = \begin{bmatrix} 1 & 0.316 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0.092 \\ 0.316 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{D}_d = [10 \quad 0]$

Hãy tính vector độ lợi hồi tiếp trạng thái sao cho hệ kín có cặp cực phức với $\xi = 0.707$ và $\omega_n = 10$ rad/sec.

Lời giải

Phương trình đặc trưng của hệ thống kín là:

$\det[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{K}] = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.316 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.092 \\ 0.316 \end{bmatrix}[k_1 \quad k_2]\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix} z - 1 + 0.092k_1 & -0.316 + 0.092k_2 \\ 0.316k_1 & z - 0.368 + 0.316k_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z - 1 + 0.092k_1)(z - 0.368 + 0.316k_2) - 0.316k_1(-0.316 + 0.092k_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + (0.092k_1 + 0.316k_2 - 1.368)z + (0.066k_1 - 0.316k_2 + 0.368) = 0 \quad (1)$$

Cặp cực quyết định mong muốn:

$$z^*_{1,2} = re^{\pm j\varphi}$$

Trong đó:

$$r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0.1\times 0.707\times 10} = 0.493$$

$$\varphi = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.1\times 10\sqrt{1-0.707^2} = 0.707$$

$$\Rightarrow \quad z^*_{1,2} = 0.493e^{\pm j0.707} = 0.493[\cos(0.707) \pm j\sin(0.707)]$$

$$\Rightarrow \quad z^*_{1,2} = 0.493e^{\pm j0.707} = 0.375 \pm j0.320$$

Phương trình đặc trưng mong muốn:

$$(z - 0.375 - j0.320)(z - 0.375 + j0.320) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 - 0.75z + 0.243 = 0 \quad (2)$$

Cân bằng các hệ số ở hai phương trình (1) và (2), ta được:

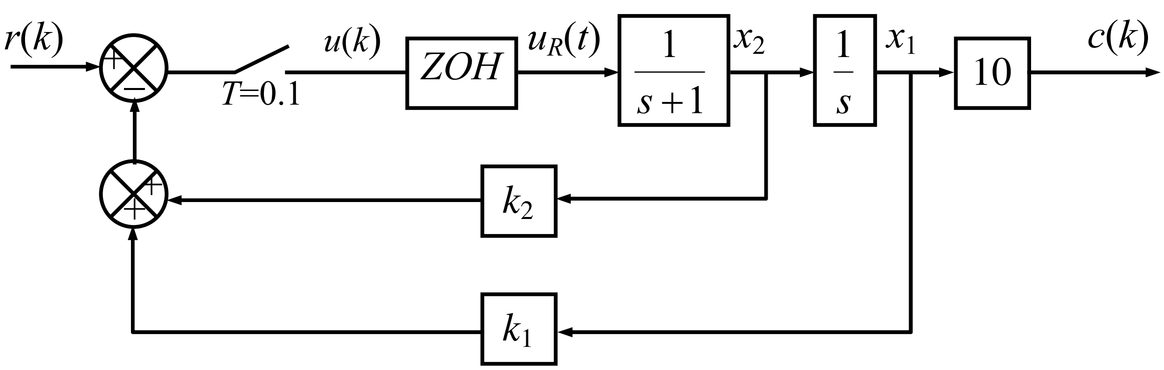
$$\begin{cases}(0.092k_1 + 0.316k_2 - 1.368) = -0.75 \\ (0.066k_1 - 0.316k_2 + 0.368) = 0.243\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$\begin{cases}k_1 = 3.12 \\ k_2 = 1.047\end{cases}$$

Vậy $\boxed{K = [3.12 \quad 1.047]}$ ■

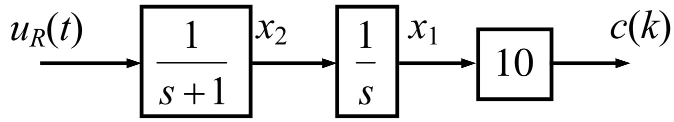
Thí dụ 8.10: Cho hệ thống điều khiển rời rạc có sơ đồ như hình vẽ.



Hãy xác định vector hồi tiếp trạng thái $\boldsymbol{K} = [k_1 \quad k_2]$ sao cho hệ thống có cặp nghiệm phức với $\xi = 0.5$ và $\omega_n = 8$ (rad/sec).

Lời giải:

– Hệ phương trình trạng thái mô tả khâu liên tục:



Theo hình vẽ ta có:

- $X_1(s) = \dfrac{X_2(s)}{s} \Rightarrow \quad sX_1(s) = X_2(s) \qquad \Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t) \qquad (1)$
- $X_2(s) = \dfrac{U_R(s)}{s+1} \qquad \Rightarrow \quad (s+1)X_2(s) = U_R(s)$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) + x_2(t) = u_R(t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u_R(t) \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta được hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_R(t)$$

Đáp ứng của hệ thống:

$$c(t) = 10x_1(t) = [10 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{Dx}(t)$$

Do đó: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = [10 \quad 0]$

– Ma trận quá độ:

- $\Phi(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \right)^{-1}$

$$= \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

- $\Phi(t) = \mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+1)} \\ 0 & \dfrac{1}{s+a} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)}\right\} \\ 0 & \mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+1}\right\} \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

– Rời rạc hóa các phương trình trạng thái của hệ liên tục, ta được:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) \\ c(k) = \boldsymbol{D}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

Trong đó:

$$\bullet\, \boldsymbol{A}_d = \Phi(T) = \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-0.1}) \\ 0 & e^{-0.1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.095 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix}$$

$$\bullet\, \boldsymbol{B}_d = \int_0^T \Phi(\tau)\boldsymbol{B}d\tau = \int_0^{0.1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-\tau}) \\ 0 & e^{-\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \right\} = \int_0^{0.1} \left\{ \begin{bmatrix} (1-e^{-\tau}) \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\tau + e^{-\tau}\right) \\ -e^{-\tau} \end{bmatrix}_0^{0.1} = \begin{bmatrix} \left(0.1 + e^{-0.1} - 1\right) \\ -e^{-0.1} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.095 \end{bmatrix}$$

$$\bullet\, \boldsymbol{D}_d = \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix}$$

– Phương trình đặc trưng của hệ thống kín:

$$\det[z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{B}_d \boldsymbol{K}] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.095 \\ 0 & 0.905 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\begin{bmatrix} z - 1 + 0.005k_1 & -0.095 + 0.005k_2 \\ 0.095k_1 & z - 0.905 + 0.095k_2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (z - 1 + 0.005k_1)(z - 0.905 + 0.095k_2) - 0.905k_1(-0.095 + 0.005k_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + (0.005k_1 + 0.095k_2 - 1.905)z + (0.0045k_1 - 0.095k_2 + 0.905) = 0 \ \ (1)$$

Cặp cực quyết định mong muốn:

$$z_{1,2}^* = re^{\pm j\varphi}$$

Trong đó:

$$r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-0.1\times 0.5\times 8} = 0.67$$

$$\varphi = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 0.1\times 8\sqrt{1-0.5^2} = 0.693$$

$\Rightarrow \quad z^*_{1,2} = 0.67e^{\pm j0.693} = 0.67[\cos(0.693) \pm j\sin(0.693)]$

$\Rightarrow \quad z^*_{1,2} = 0.516 \pm j0.428$

Phương trình đặc trưng mong muốn:

$(z - 0.516 - j0.428)(z - 0.516 + j0.428) = 0$

$\Leftrightarrow \quad z^2 - 1.03z + 0.448 = 0 \qquad (2)$

Cân bằng các hệ số ở hai phương trình (1) và (2), ta được:

$$\begin{cases}(0.005k_1 + 0.095k_2 - 1.905) = -1.03 \\ (0.0045k_1 - 0.095k_2 + 0.905) = 0.448\end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$\begin{cases}k_1 = 44.0 \\ k_2 = 6.895\end{cases}$$

Vậy $\boxed{K = \begin{bmatrix}4.805 & 8.958\end{bmatrix}}$ ■

8.3.5. Thiết kế bộ điều khiển PID

8.3.5.1. Phương pháp Zeigler–Nichol

Hàm truyền bộ điều khiển PID:

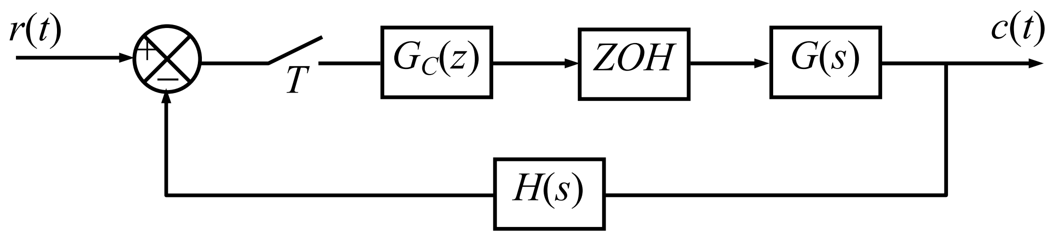
$$G_{PID}(z) = K_P + \frac{K_I T}{2}\frac{z+1}{z-1} + \frac{K_D}{T}\frac{z-1}{z}$$

Nếu chu kỳ lấy mẫu T đủ nhỏ để không làm ảnh hưởng đến chất lượng của hệ thống (xem mục 8.2.4) thì các hệ số K_P, K_I, K_D có thể chọn bằng phương pháp thực nghiệm Zeigler–Nichol như đã trình bày ở chương 6.

8.3.5.2. Phương pháp giải tích

Từ yêu cầu thiết kế về đáp ứng quá độ (vị trí nghiệm của phương trình đặc trưng) và sai số xác lập, có thể tính toán giải tích để chọn thông số bộ điều khiển PID số. Sau đây là một số thí dụ.

Thí dụ 1: Cho hệ thống điều khiển có sơ đồ như hình vẽ:



$$G(s)=\frac{10}{10s+1}; \qquad H(s)=0.05; \qquad T=2\sec$$

Thiết kế khâu hiệu chỉnh $G_C(z)$ để hệ thống có cặp cực phức với $\xi=0.707$, $\omega_n=2$ rad/sec và sai số xác lập đối với tín hiệu vào là hàm nấc đơn vị bằng 0.

Lời giải:

Do yêu cầu sai số xác lập đối với tín hiệu vào là hàm nấc bằng 0 nên ta sử dụng khâu hiệu chỉnh $G_C(z)$ là khâu PI.

$$G_C(z)=K_P+\frac{K_IT}{2}\frac{z+1}{z-1}$$

Phương trình đặc trưng của hệ thống sau khi hiệu chỉnh là:

$$1+G_C(z)GH(z)=0$$

Trong đó:

- $GH(z)=\mathcal{Z}\{G_{ZOH}(s)G(s)H(s)\}$

$$=\mathcal{Z}\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{10\times 0.05}{(10s+1)}\right\}$$

$$=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{0.05}{s(s+0.1)}\right\}$$

$$=(1-z^{-1})\frac{0.05z(1-e^{-0.2})}{0.1(z-1)(z-e^{-0.2})}$$

$$\Rightarrow \qquad GH(z)=\frac{0.091}{(z-0.819)}$$

Do đó phương trình đặc trưng của hệ thống là:

$$1+\left(K_P+\frac{K_IT}{2}\frac{z+1}{z-1}\right)\left(\frac{0.091}{z-0.819}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+\left(K_P+\frac{K_IT}{2}\frac{z+1}{z-1}\right)\left(\frac{0.091}{z-0.819}\right)=0$$

Thay T=2, ta suy ra:

$$z^2 + (0.091K_P + 0.091K_I - 1.819)z + (-0.091K_P + 0.091K_I + 0.819) = 0 \quad (1)$$

Cặp cực quyết định mong muốn là:

$$z^*_{1,2} = re^{\pm j\varphi}$$

Với:

$$r = e^{-T\xi\omega_n} = e^{-2\times 0.707\times 2} = 0.059$$

$$\varphi = T\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = 2\times 2\times\sqrt{1-0.707^2} = 2.828$$

$$\Rightarrow \quad z^*_{1,2} = 0.059e^{\pm j2.828} = 0.059[\cos(2.828) \pm j\sin(2.828)]$$

$$\Rightarrow \quad z^*_{1,2} = -0.056 \pm j0.018$$

Phương trình đặc trưng mong muốn là:

$$(z + 0.056 + j0.018)(z + 0.056 - j0.018) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 + 0.112z + 0.0035 = 0 \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2), suy ra:

$$\begin{cases} 0.091K_P + 0.091K_I - 1.819 = 0.112 \\ -0.091K_P + 0.091K_I + 0.819 = 0.0035 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, ta được:

$$\begin{cases} K_P = 15.09 \\ K_I = 6.13 \end{cases}$$

Vậy: $$\boxed{G_C(z) = 15.09 + 6.13\frac{z+1}{z-1}}$$ ■